Boris Čekrlija

MATEMATIČKA TAKMIČENJA

UČENIKA OSNOVNIH ŠKOLA REPUBLIKE SRPSKE

$r^2\pi$ a^2

1995 - 2019.

Boris Čekrlija

MATEMATIČKA TAKMIČENJA UČENIKA OSNOVIH ŠKOLA REPUBLIKE SRPSKE 1995–2019.

Izdavač
Grafid d.o.

Za izdavača
Srđan Ivanković

Recenzenti
Dr Milovan Vinčić, Ekonomski fakultet Banja Luka,
Dragana Tatić Maletić, Osnovna škola „Branko Ćopić“ Banja Luka

Urednik
Dr Đorđe Čekrlija

Lektor
Mr Momir Lakić

Likovno-grafička oprema i priprema za štampu
Boris Čekrlija

Štampa
Grafid d.o.

Za štampariju
Srđan Ivanković

PREDGOVOR PRVOM IZDANJU

Svakog proljeća učenici osnovnih škola učestvuju na matematičkim takmičenjima. Prvo takmičenje iz matematike na nivou Republike Srpske, za učenike šestih, sedmih i osmih razreda, održano je 1995. godine. Takmičenja su održavana svake godine na tri nivoa: opštinskom, regionalnom i republičkom.

Ova knjiga je zbirka objavljenih zadataka na svim nivoima takmičenja od 1995. do zaključno 2012. godine. Iz prvog dijela knjige, gdje su navedeni zadaci po godinama i nivoima takmičenja vidi se da sudjelovanje učenika po razredima nije bilo konstantno nego se mijenjalo u zavisnosti od promjene (primjene) pravilnika o takmičenju učenika.

Takođe, od 2004. godine se takmiče učenici devetih razreda, što je uslovljeno uvođenjem devetogodišnjeg osnovnog obrazovanja.

U proteklom periodu program nastave matematike se nije znatno mijenjao. To je bio razlog što su zadaci navedeni po razredima, a ne po tematskim cjelinama.

Knjiga je namijenjena nastavnicima matematike, kao priručnik za dodatni rad sa učenicima, u okviru priprema za takmičenja. Takođe, namijenjena je i svim učenicima koji se samostalno pripremaju za takmičenja iz matematike.

I ovom prilikom želim da izrazim javnu zahvalnost recenzentima, dr Milovanu Vinčiću i nastavnici Dragani Tatić Maletić, koji su pažljivo pročitali rukopis i korisnim savjetima doprinijeli poboljšanju konačne verzije ove knjige.

Svaku primjedbu i sugestiju čitaoca pažljivo ću razmotriti, a biću zahvalan svima koji mi ukažu na uočene greške ili propuste, kojih, uz sva nastojanja, nije moguće potpuno izbjeći.

Banja Luka, decembar 2012. godine

Autor

PREDGOVOR DRUGOM DOPUNJENOM IZDANJU

U ovom drugom dopunjenom izdanju su dodati zadaci od 2013. do zaključno 2019. godine i pri tome su otklonjene uočene greške.

Banja Luka, maj 2019. godine

Autor

Aleksandru, Leoni i Filipu s ljubavlju

S A D R Ž A J

1995. godina 7
1996. godina 9
1997. godina 11
1998. godina 14
1999. godina 19
2000. godina 22
2001. godina 26
2002. godina 29
2003. godina 33
2004. godina 38
2005. godina 42
2006. godina 47
2007. godina 52
2008. godina 56
2009. godina 62
2010. godina 65
2011. godina 68
2012. godina 72
2013. godina 74
2014. godina 77
2015. godina 79
2016. godina 82
2017. godina 85
2018. godina 88
2019. godina 91
Rješenja zadataka 95
O autoru 286

Opštinsko takmičenje 1995.

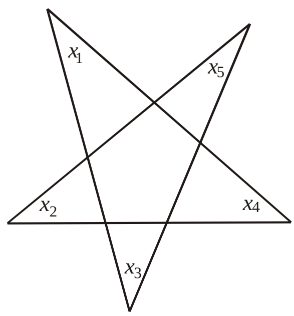
VI razred

1. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je $\frac{24}{3n-4}$ takođe prirodan broj.

2. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje važi $\frac{3}{4} < \frac{n+3}{6} < \frac{7}{5}$.

3. Branko je dugovao Marku izvjesnu sumu novca. Vraćanje duga je izvršeno na sljedeći način: prvo je vraćena jedna četvrtina duga, zatim četiri devetine ostatka i još 640 dinara. Poslije toga trebalo je da Branko vrati Marku još tri dvadesetine duga. Koliko je Branko dugovao Marku?

4. Izračunati zbir unutrašnjih uglova x_1, x_2, x_3, x_4 i x_5 zvijezde date na slici.



5. Data je prava p i tačka C van prave p. Konstruisati jednakokraki trougao kome će prava p biti osa simetrije a tačka C tjeme osnovice. Ugao pri vrhu trougla je 30^{o}. Konstrukciju obrazložiti.

VII razred

6. Odrediti vrijednost izraza $a^2b - b + ab^2 - a$ za $a = -1\frac{5}{8}$ i $b = -\frac{8}{13}$.

7. Izračunati vrijednost izraza $\frac{1 \cdot 2 \cdot 4 + 2 \cdot 4 \cdot 8 + 3 \cdot 6 \cdot 12 + \cdots + 100 \cdot 200 \cdot 400}{1 \cdot 3 \cdot 9 + 2 \cdot 6 \cdot 18 + 3 \cdot 9 \cdot 27 + \cdots + 100 \cdot 300 \cdot 900}$.

8. U kvadratu $ABCD$ tačka M je središte stranice CD, a N središte stranice AD. Duži BM i CN sijeku se u tački E. Dokazati da je: a) $BM \perp CN$, b) $AE = AB$.

9. Kod paralelograma $ABCD$ stranica AB je dva puta duža od stranice BC. Ako je M središte stranice AB, izračunati ugao CMD.

10. Ako su a i b katete i c hipotenuza pravouglog trougla, onda za poluprečnik r upisane kružnice važi $r = \frac{a+b-c}{2}$. Dokazati.

VIII razred

11. Ako je n prirodan broj, onda je $n^5 - 5n^3 + 4n$ djeljivo sa 120. Dokazati.

12. Odrediti vrijednost promjenljive x tako da jednačina $(7-a)x = 1-2x$ bude ekvivalentna sa jednačinom $3 - \frac{a-1}{2} = a - 4$

13. Dva radnika mogu da završe neki posao za 12 dana. Poslije pet dana zajedničkog rada jedan radnik se razbolio. Drugi radnik je, radeći sam, ostatak posla završio za 17,5 dana. Za koliko dana taj posao može da završi svaki radnik radeći sam?

14. U unutrašnjoj oblasti diedra sa uglom od 120^0 data je tačka P koja je udaljena po 4 cm od obje strane diedra. Izračunati rastojanje tačke P od ivice diedra.

15. Površine baze i omotača pravilne šestostrane piramide odnose se kao $\sqrt{3} : 2$. Izračunati visinu piramide ako je osnovna ivica piramide $a = 10\ cm$

Regionalno takničenje 1995.

VII razred

16. Neka je $A = (a-2)^2 - (a+2)^2$ i $B = (b+3)^2 - (b-3)^2$. Kako se odnose brojevne vrijednosti izraza A i B ako je $a = 2\frac{1}{2}$ i $b = -1\frac{1}{4}$?

17. Dat je skup $M = \{x | x \leq 30, x \in N\}$. Odrediti skup svih uređenih parova

$R = \{(a,b) | a, b \in M\}$ za koje izraz $\left(\frac{3}{5}a - b\right)^2 + 1$ ima najmanju vrijednost.

18. Dokazati da je broj $n^3 + 1994n$ djeljiv sa 3 za svaki prirodan broj n. Ako je n paran, dokazati da je $n^3 + 1994n$ djeljiv i sa 6.

19. U pravouglom trouglu ABC konstruisana je hipotenuzina visina CD. Dokazati da je zbir poluprečnika kružnica upisanih u trouglove ABC, ACD i BCD jednak CD.

20. Dat je paralelogram $ABCD$ kome je unutrašnji ugao kod tjemena B tup. Stranice AB i CB produžene su preko tačke B i na produžecima date tačke E i F, tako da su duži BE i BF osnovice jednakokrakih trouglova BCE i ABF. Dokazati da je trougao DEF jednakokraki.

VIII razred

21. U jednačini $\frac{x+n}{2} - \left(1 - \frac{3x-n}{3}\right) = 2,\ n \in N$, odrediti vrijednosti parametra n tako da rješenje jednačine bude prirodan broj.

22. Broj $2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + \cdots 2^{99} + 2^{100}$ je djeljiv sa 3. Dokazati.

23. Riješiti nejednačinu $\frac{2-x}{x-1} > \frac{2}{3}$.

24. Površina pravilne trostrane piramide je $648\sqrt{3}\ cm^2$ Izračunati zapreminu piramide ako je visina piramide dva puta veća od osnovne ivice piramide.

25. Dokazati da je površina pravouglog trougla jednaka proizvodu odsječaka koje na hipotenuzi gradi upisani krug.

Republičko takmičenje 1995.

VII razred

26. Odrediti broj čiji je zbir cifara jednak razlici broja 328 i samog tog broja.

27. Ako je $a+b+c=0$, dokazati da je $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$.

28. Na stranici BC trougla ABC data je tačka M, tako da su trouglovi ABM i AMC jednakokraki. Izračunati uglove trouglova ABC ako je $\sphericalangle CAB = 75^{\circ}$.

29. Centar O kruga poluprečnika $r=3\ cm$ pripada hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC. Krug dodiruje katete trougla ABC. Odrediti površinu trougla ako je $OB=5\ cm$.

VIII razred

30. Naći sve trocifrene brojeve $\overline{abc}$, $(a\neq b\neq c\neq a, a,b,c\neq 0)$, za koje vrijedi

$$a^2-b^2-c^2=a-b-c.$$

31. Odrediti najmanju vrijednost izraza $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+10$.

32. Visina prave kupe je $H=\sqrt{2}\ cm$. Na kom rastojanju od vrha kupe treba postaviti ravan paralelno sa osnovom kupe, tako da ona dijeli omotač kupe na dva dijela jednakih površina?

33. Trougao ABC je jednakostraničan. Tačka T u ravni trougla udaljena je od njegovih vrhova: $AT=3\ cm$, $BT=5\ cm$ i $CT=8\ cm$. Dokazati da tačka T ne pripada trouglu ABC.

Opštinsko takmičenje 1996.

VII razred

34. Odrediti brojeve a, b, c, d tako da izraz

$$a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)$$

ima najmanju vrijednost.

35. Trougao čije stranice su $2xy$, x^2-y^2, x^2+y^2 $(x>y, x>0\ , y>0)$ je pravougli. Dokazati.

36. Ako je $a^2+a+1=0$, koliko je $a^{1996}+\frac{1}{a^{1996}}$?

37. Kraci trapeze su 39 cm i 45 cm, a dijagonala koja je normalna na dužem kraku ima dužinu 60 cm. Izračunati obim i površinu tog trapeza.

38. Odrediti 155. cifru poslije zapete u decimalnom zapisu broja $\frac{3}{7}$.

VIII razred

39. Odrediti sve parove prirodnih brojeva x, y za koje je tačna jednakost

$$3xy-x(4y+1)=35-2xy.$$

40. Cifra jedinica šestocifrenog broja je 7. Ako se ta cifra premjesti na prvo mjesto dobije se broj pet puta veći od polaznog. Koji je to broj?

41. Polinom $P(x) = \frac{m-9}{4}x + \frac{m+2}{3}x^2 - x^3$ ima vrijednost 16 za $x = -2$. Kolika je njegova vrijednost za $x = 1$?

42. U linearnoj funkciji $y = \frac{m-1}{2}x + \frac{m+1}{2}$, $m \in R$, odrediti parametar m tako da njen grafik bude paralelan grafiku funkcije $2x - y + 5 = 0$. Izračunati površinu dijela ravni ograničenu tim paralelnim pravama i koordinatnim osama.

43. Osnova uspravne prizme je jednakokraki trougao osnovice a i ugla pri vrhu od 120^0. Kolika je zapremina prizme (u funkciji od a), ako je površina omotača dva puta veća od površine baze?

Regionalno takmičenje 1996.

VII razred

44. Odrediti broj $\overline{abcd}$, ako je $\overline{abcd} \cdot 4 = \overline{dcba}$ ·

45. Osnovice jednakokrakog trapeza su 9 cm i 1 cm, a krak mu je za 2 cm duži od visine. Izračunati: a) dužinu dijagonale trapeze; b) rastojanje između središta dija-gonala.

46. a) Odrediti broj stranica pravilnog mnogougla ako se njegov unutrašnji ugao i unutrašnji ugao pravilnog petougla odnose kao $3 : 2$.

b) Koliko ima pravilnih mnogouglova takvih, da im se unutrašnji uglovi odno-se kao $3 : 2$.

47. Dat je izraz $x^2 + y^2 + 4x - 4y + 10$.
a) Pokazati da je ovaj izraz ima pozitivan za sve realne vrijednosti x i y.
b) Odrediti najmanju vrijednost datog izraza kao i vrijednosti x, y za koje taj izraz postiže.

VIII razred

48. Ako šestocifrenom broju izostavimo cifru 9 na početku, dobije se dva puta manji broj nego kad mu izostavimo cifru 8 na kraju. Odrediti taj broj.

49. Nad krakom BC jednakokrakog trougla ABC $(CA = CB)$, konstruisan je kvad-rat $BCDE$ izvan trougla. Pokazati da ugao $\sphericalangle DAB$ ima konstantnu veličinu.

50. Osnovna ivica pravilne; četverostrane piramide $SABCD$ jednaka je a, a visina H. Piramida je presječena ravni koja sadrži osnovnu ivicu AD i središta bočnih ivi-ca SB i SC. Naći rastojanje vrha S piramide od presječne ravni. (Specijalno, ako je $a = 8\ cm$ i $H = 9\ cm$.)

51. Odrediti sve vrijednosti parametra m za koje jednačina $m^2x - 1 = 3m^2 - x$ ima rješenje: a) veće od 0; b) veće od 2.

Republičko takmičenje 1996.

VII razred

52. Prirodan broj m jedanak je kvadratu prirodnog broja n, a njegova cifra desetica je neparna. Koja cifra mora stajati na mjestu jedinica broja m?

53. Unutar jednakostraničnog trougla ABC, stranica a, uzeta je proizvoljna tačka P, iz koje su povučene normale PD, PE i PF redom na stranice BC, AB i AC. Izračunati $(PD + PE + PF) : (AF + CD + BE)$.

54. Dokazati da je broj $n^5 - 5n^3 + 4n$ djeljiv sa 120 za svaki prirodan broj n.

55. U jednakokrakom trapezu $ABCD$ dijagonale su uzajamno normalne, a visina trapeza jednaka je h.
a) Četverougao $MNPQ$, čija su tjemena središta stranica trapeze je kvadrat. Dokazati.
b) Izračunati odnos površine trapeza $ABCD$ i površine kvadrata $MNPQ$.

56. U kvadratu stranice 1 izabrano je 5 proizvoljnih tačaka. Odrediti najmanji mogući broj a takav, da je uvijek moguće izabrati bar jedan par tih tačaka, od 5 izabranih, čije rastojanje nije veće od a.

VIII razred

57. Dokazati da je od 100 prirodnih brojeva uvijek moguće izabrati 15 takvih da je razlika bilo koja dva od njih djeljiva sa 7.

58. U pravilnoj šestostranoj piramidi, osnovne ivice a, bočne strane grade ugao od 60^0 sa ravni osnove. Kroz osnovnu ivicu postavljena je ravan normalno na suprotnu bočnu stranu. Naći površinu presjeka piramide i te ravni.

59. Niz brojeva $a_1, a_2, a_3 \cdots$ zadan je sa prva dva člana $a_1 = 2, , a_2 = 3$ i uslovom $a_{k+2} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $(k = 1, 2, 3, ...)$. Odrediti a_{1996}.

60. U pravougli trapez upisan je krug poluprečnika r. Najkraća stranica trapeza jednaka je $3r/2$. Naći odnos površine upisanog kruga i površine trapeza.

61. Naselja A, B i C su tjemena jednakostraničnog trougla. U naselju A živi 30 učenika, u naselju B 20 učenika i u naselju C 10 učenika. Gdje treba sagraditi školu pa da ukupan put koji prelaze svi učenici od kuće do škole bude najkraći?

Opštinsko takmičenje 1997.

V razred

62. Odrediti skup A ako je $\{1, 2, 3\} \cap A = \{2, 3\}$ i $A \subset \{2, 3, 5\}$. Odrediti sva moguća rješenja.

63. U petak učenici jednog odjeljenja petog razreda trebaju da imaju tri časa: geografiju, istoriju i matematiku. Pri sastavljanju rasporeda učenici su izrazili želju da matematika ne bude posljednji čas, da istorija bude prvi ili treći čas, da geografija ne bude prvi čas. Kako se može sačiniti takav raspored?

64. U magacinu ima 120 većih i 40 manjih konzervi. Njihova ukupna masa je $108\ kg$. Masa tri veće konzerve iznosi osam manjih. Izračunati masu veće i manje konzerve.

65. U četverocifrenom broju $*\ 13\ *$ umjesto zvjezdica staviti odgovarajuće cifre tako da dobijeni broj bude djeljiv sa 36. Odrediti sva moguća rješenja.

66. Učenik je pročitao knjigu za tri dana. Prvog dana je pročitao tri osmine knjige, drugog dana pet dvanaestina knjige, a trećeg dana jednu šestinu knjige i još 10 stranica. Koliko stranica ima ta knjiga?

VI razred

67. Odrediti skup X ako je $\{a, b, c\} \cap X = \{b, c\}$ i $X \subset \{a, b, c, d, e\}$. Odrediti sva moguća rješenja.

68. Ako je spoljašnji ugao $\alpha_1 = 131^0$, a unutrašnji ugao $\beta = 79^0$, odrediti unutrašnje i spoljašnje uglove tog trougla. Kako se naziva taj trougao u odnosu na uglove?

69. Za numerisanje strana jedne knjige upotrebljeno je 300 cifara. Koliko strana ima ta knjiga?

70. Jedan broj je veći od drugog za 203. Ako se veći broj podijeli manjim, dobiće se količnik 3 i ostatak 33. Koji su to brojevi?

71. Odrediti za koje cijele brojeve a je izraz $\frac{3}{a+6}$ cijeli broj.

VII razred

72. Ako je n neparan prirodan broj, onda dokazati da je broj $n^3 + 3n^2 - n - 3$ djeljiv sa 48.

73. U trouglu ABC je $AB = 14\ cm$, $BC = 13\ cm$, a površina mu je $84\ cm^2$, Odrediti dužinu treće stranice trougla ABC.

74. Odrediti najmanji prirodan broj kojim treba pomnožiti broj $8\ 316$ da se dobije broj koji je potpun kvadrat jednog prirodnog broja.

75. Dužina osnovice jednakokrakog trougla je $4\sqrt{2}\ cm$, a težišna duž koja odgovara kraku je $5\ cm$. Kolika je dužina kraka?

76. U nekom razredu 25 učenika uči engleski, 23 francuski, 23 ruski, 9 engleski i ruski, 7 engleski i francuski i 10 francuski i ruski jezik. Koliko učenika ima u tom razredu ako je učenje bar jednog jezika obavezno?

VIII razred

77. Dokazati da je za prirodan broj n, $n > 2$, vrijednost izraza $\frac{n^5}{120} - \frac{n^3}{24} + \frac{n}{30}$ prirodan broj.

78. Radnik A je uradio $\frac{3}{5}$ posla, a zatim je radnik B dovršio taj posao, tako da je sav posao urađen za 12 dana. Za koliko bi dana taj posao zajedno uradili ako se zna da bi radnik B radeći sam morao utrošiti 5 dana više nego radnik A radeći sam?

79. Visina bočne strane pravilne šestostrane piramide je $10\ cm$, a ugao koji gradi sa ravni osnove je 60^0. Odrediti površinu presjeka piramide i ravni koja sadrži dvije naspramne bočne ivice piramide.

80. Dokazati nejednakost $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\dots\cdot\frac{120}{121} > 1$.

81. Dužina težišnih duži u pravouglom trouglu su $t_a = 7$ i $t_b = 4$. Izračunati dužinu hipotenuze.

Regionalno takmičenje 1997.

VII razred

82. Ako su a, b, c realni brojevi takvi da je $a + b + c = 0$ i $a^2 + b^2 + c^2 = 1$, izračunati $a^4 + b^4 + c^4$.

83. Dokazati da ne postoji trocifren broj $\overline{abc}$ za koji je $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ potpun kvadrat prirodnog broja.

84. Ako je $x + y \geq 0$ $(x, y \in R)$, dokazati da je $x^5 + y^5 \geq x^4y + y^4x$.

85. U trouglu ABC sa uglovima $\sphericalangle ABC = 30^0$ i $\sphericalangle ACB = 15^0$ iz tjemena A konstruisana je normala na stranicu AC. Ova normala siječe BC u tački D. Dokazati da je $CD = 2AB$.

86. U unutrašnjosti kvadrata stranice $4\ cm$ date su 81 tačka. Dokazati da se od tih tačaka mogu izabrati 6 koje pripadaju krugu poluprečnika $0{,}8\ cm$.

VIII razred

87. Odrediti sve cjelobrojne uređene parove (x, y) za koje je

$$xy + 3x - 5y + 3 = 0.$$

88. Ako je $x + y + z \geq 0$, $x, y, z \in R$, dokazati da je $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz \geq 0$.

89. Naći sve četverocifrene brojeve koje treba s desne strane dopisati broju 400 da bi tako dobijeni sedmocifreni broj bio potpun kvadrat prirodnog broja.

90. Prava povučena iz tjemena pravog ugla trougla dijeli pravi ugao u odnosu $1:2$ i hipotenuzu u odnosu $1:3$. Izračunati dužinu hipotenuze ako je dužina kraće katete $\sqrt{3}$.

91. Kvadratna jednakoivična piramida, ivice $a = 4\ cm$, presječena je ravninom koja prolazi kroz sredinu dvaju susjednih osnovnih ivica i sredinu visine te piramide. Kolika je površina tog presjeka?

Republičko takmičenje 1997.

VII razred

92. Ako je $(a^2 + b^2) : ab = 5 : 2$ i $b > a > 0$, odrediti $(a + b) : (a - b)$

93. Koji prirodni brojevi mogu biti najveći zajednički djelilac brojeva $n^2 + 1$ i $(n + 1)^2 + 1$, gdje je n prirodan broj?

94. Dat je trougao ABC. Kružnica konstruisana nad prečnikom AC, polovi stranicu BC, a stranicu AB siječe u tački D tako da je $AD : DB = 1 : 2$. Odrediti površinu trougla ABC ako je $AC = 1$.

95. Tačke A_1, B_1 i C_1 su redom dodirne tačke kružnice upisane u pravougli trougao ABC (sa pravim uglom kod tjemena C) sa stranicama BC, AC i AB tog trougla. Dokazati da je $A\,C_1 \cdot B\,C_1 = S$, gdje je S površina trougla ABC.

96. Visine trougla ABC sijeku se u tački O. Ako je $OC = AB$, koliki je ugao kod tjemena C?

VIII razred

97. Odrediti sve cjelobrojne trojke (x, y, z) koje ispunjavaju uslove

$$x + y + z = 0 \text{ i } x^3 + y^3 + z^3 = -36.$$

98. Dokazati da se od 53 različita prirodna broja, čiji zbir nije veći od 2 132, mogu izabrati dva čiji je zbir jednak 53.

99. Iz tačke D, koja pripada hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC povučena je normala na AB, tako da ona dijeli trougao na dvije figure jednakih površina. Ako je $AD = a$ i $DB = b$, izraziti površinu trougla ABC pomoću a i b. (Razmotriti sve mogućnosti!)

100. Pravilna šestostrana piramida, sa dužinom a osnovne ivice i dužinom b bočne ivice, presječena je ravninom koja je okomita na bazu piramide, a prolazi kroz sredinu dvaju susjednih osnovnih ivica. Odrediti površinu presjeka piramide i te ravni pomoću a i b. (Kolika je površina ako je $a = 4$ i $b = 8$?)

101. U dati jednakokraki trougao ABC, sa pravim uglom kod tjemena C, upisan je drugi jednakokraki pravougli trougao MNQ, sa pravim uglom kod tjemena Q, tako da $Q \in BC$, $M \in AC$ i $N \in AB$. Odrediti najmanji mogući odnos površina trouglova MNQ i ABC: $P_{MNQ} : P_{ABC}$.

Opštinsko takmičenje 1998.

V razred

102. Od tri data broja sabiranjem svaka dva dobiju se zbirovi 332, 274, 390. Odrediti te brojeve.

103. Odrediti sve četverocifrene brojeve $\overline{a5b4}$ koji su djeljivi sa 12, pri čemu su sve cifre različite.

104. Za jedno kupatilo potrebno je 600 keramičkih pločica oblika kvadrata stranice $15\ cm$. Koliko je potrebno keramičkih pločica oblika pravougaonika stranica $10\ cm$ i $20\ cm$?

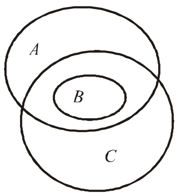
105. U jednoj školi ima 720 učenika, odličnih je jedna šestina, vrlodobrih 35%, dobrih sedam dvadesetina i dovoljnih jedna osamnaestina. Koliko ima nedovoljnih učenika?

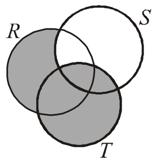
106. Na slikama su skupovi predstavljeni Venovim dijagramima

a) Osjenčiti skup $(C\backslash B) \cap A$, sl. a);

b) Osjenčene dijelove na dijagramu sl. b) izraziti koristeći skupovne operacije.

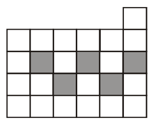
a) b)





VI razred

107. Datu figuru razrezati na pet jednakih dijelova tako da se u svakom dijelu na-lazi tačno po jedan crni kvadrat.



108. U prizemlju robne kuće se nalazi lift koji ne može podići više od 150 kg. Četiri posjetioca teže: $60\ kg$, $80\ kg$, $80\ kg$, $80\ kg$. Koliko najmanje puta mora lift preći put između prizemlja i posljednjeg sprata da bi odveo sva četiri posjetioca iz prizemlja na posljednji sprat?

109. Sabirajući dva prirodna broja učenik je na kraju prvog sabirka greškom dodao (dopisao) nulu i umjesto tačnog rezultata $2\,801$ dobio je zbir $10\,001$. Koje brojeve je učenik sabirao?

110. Proizvod dva broja je $2\,652$. Ako prvi broj umanjimo za 2, proizvod će biti $2\,244$. Odrediti te brojeve.

111. U trouglu ABC težišna duž CE je normalna na duž AD, simetralu $\sphericalangle BAC$ datog trougla. Odrediti dužinu stranice AC ako je $AB = 12\ cm$.

VII razred

112. Četverocifreni broj je proizvod tri uzastopna prosta broja, a ima istu vrijednost bilo da se čita zdesna ulijevo ili slijeva udesno. Odrediti taj broj.

113. a) Odrediti broj x tako da vrijednosti izraza $a(x) = 2x$ i $b(x) = 14 - 1{,}5x$ budu dužine kateta i $c(x) = 2{,}5x - 2$ dužina hipotenuze pravouglog trougla.

b) Za dobijenu vrijednost x odrediti poluprečnik kružnice upisane u taj pravougli trougao.

114. Dokazati tvrdnju:

Ako je $x = a^3 - 3$ i $y = a^3 + 3$, onda je $x(x - 2y) + y(x + y) - a^6 = 27$.

115. Ugao naspram osnovice jednakokrakog trougla je 30^0, a dužina kraka je 1 cm.

a) Odrediti dužine dijelova na koje je krak podijeljen visinom.
b) Izračunati visinu tog trougla.

116. Odrediti uglove trougla kome su centar opisane i upisane kružnice simetrične u odnosu na jednu stranicu

VIII razred

117. Proizvod broja 21 i jednog četverocifrenog broja je kub prirodnog broja. Odrediti taj četverocifreni broj.

118. Izračunati površinu trougla kojeg grade grafici funkcija:

$$y = -\frac{8}{3}x + 8,\ y = \frac{7}{4}x - \frac{21}{4} \text{ i } y = -\frac{1}{7}x + 8.$$

119. U jednakostraničnom trouglu upisana su tri kruga, tako da svaki dodiruje druga dva kruga i dvije stranice trougla. Izračunati dužinu poluprečnika ovih krugova, ako je dužina stranice trougla 2 cm.

120. Osnova prave prizme je trougao stranica $c = 6\ cm$, $a = b = 5\ cm$. Ako je površina omotača prizme $M = 96\ cm^2$, izračunati njenu zapreminu.

121. Ivice kvadra odnose se kao $2 : 3 : 6$, a dijagonala kvadra je $42\ cm$. Izračunati:

a) Dužine ivica kvadra,
b) Površinu dijagonalnog presjeka, kojem pripada najduža ivica.

Regionalno takmičenje 1998.

V razred

122. a) Datu tabelu popuniti brojevima 1, 2, 3, 4, i 5 tako da se svaki od brojeva pojavljuje samo jednom u bilo kom redu, koloni ili dijagonali.

1				2
	2		5	
		3		1
2				3
	3		1	

b) Tako popunjena tabela predstavlja u svakom redu po jedan petocifreni broj. Da li je njihov zbir djeljiv sa 15?

123. Dvije prave se sijeku i obrazuju četiri ugla. Zbir unakrsnih oštrih uglova jednak je polovini jednog od unakrsnih tupih uglova. Odrediti mjerni broj svakog od tih uglova.

124. U pet autobusa i dva trolejbusa može da se preveze 300 putnika, a u dva autobusa i tri trolejbusa 230 putnika. Koliko putnika se može prevesti jednim autobusom, odnosno jednim trolejbusom?

125. Dešifrovati sabiranje: $\overline{ABCD}+\overline{ABC}+\overline{AB}+\overline{A}=7890$. ($\overline{ABCD}$ je četverocifreni broj.)

126. Razlomak $\frac{83}{140}$ predstaviti kao zbir tri razlomka sa jednocifrenim imeniocima.

VI razred

127. Kod trocifrenog broja n, cifra stotica jednaka je cifri jedinica. Broj n je djeljiv sa 15. Odreditit sve brojeve koji imaju ovo svojstvo.

128. Konstruisati trougao ABC ako su poznati sljedeći elementi:

$$CC_1 = h_c = 3\ cm,\ \sphericalangle A = 60^0,\ \sphericalangle B = 45^0.$$

129. U jednakokrakom trouglu ABC $(AC = BC)$ obima 22 cm konstriusana je težišna duž AA_1 . Odrediti dužine stranica trougla ABC ako su obimi trouglova ABA_1 i AA_1C, redom, 17 cm i 19 cm.

130. Ako nekom broju x dopišemo zdesna cifru 8, te dobiveni broj podijelimo sa 13, zatim dobiveni količnik uvećamo za 5 i tako dobiveni broj podijelimo sa 11 dobije se 21. Naći broj x.

131. Odrediti brojeve a i b za koje važi jednakost: $\frac{a}{6}-\frac{2}{b}=\frac{1}{30}$.

VII razred

132. Odrediti obim pravouglog trougla površine 54 cm^2, ako za dužine njegovih stranica važi $2b = c + a$, gdje su a i b katete, a c hipotenuza datog trougla.

133. Riješiti jednačinu $x^3+\sqrt{3}=7+\sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

134. Neka su a i b brojevne vrijednosti kateta, a c brojevna vrijednost hipotenuze pravougog trougla ABC. Dokazati da je $ab + bc + ca < 2c^2$.

135. U kvadratu $ABCD$ data je tačka M tako da važi $AM = 7\ cm$, $BM = 13\ cm$, $CM = 17\ cm$. Odrediti površinu kvadrata $ABCD$.

136. Osam malih traktora može uzorati jednu njivu za pet dana, a pet velikih traktora uzoru istu njivu za tri dana. Za koliko dana dva mala i tri velika traktora uzoru njivu, čija se površina odnosi prema površini prve njive kao 7 : 2? (Traktori istog tipa za isto vrijeme uzoru jednake površine.)

VIII razred

137. Riješiti jednčinu $x \cdot |x| + 1 = \frac{|x|}{x}$.

138. Polinom $P(x) = ax^2 + bx + c$ zadan je tabelom:

x	0	1	2
$P(x)$	35	24	15

a) Odrediti polinom $P(x)$;
b) Dokazati da je polinom $P(x)$ za neparne cijele brojeve x djeljiv sa 8.

139. Odrediti prirodne brojeve a, b i c za koje važi jednakost $a^2b^3c = 1152$ i $ab^2c^3 = 384$.

140. U trouglu ABC visine se odnose kao $6 : 4 : 3$. Odrediti površinu trougla ABC ako je njegov obim $130\ cm$.

141. Osnova prave prizme je romb. Površine dijagonalnih presjeka te prizme su $88\ cm^2$ i $66\ cm^2$. Izračunati površinu omotača prizme.

Republičko takmičenje 1998.

VI razred

142. Broju 0,123456789101112…282930 precrtati 47 cifara iza decimalnog zareza da bi tako dobijeni broj bio najmanji.

143. Tek oboreno stablo teško je 2,25 tona i sadrži 64% vode. Poslije deset dana to stablo je sadržavalo 46% vode. Za koliko se smanjila masa stabla za tih deset dana?

144. Razlika četverocifrenog broja A i broja zapisanog istim ciframa. ali u obrnutom poretku je 90. Od svih tako dobijenih brojeva A odrediti najveći broj čiji je zbir cifara stotina i desetica najmanji.

145. Odrediti zbir svih trocifrenih brojeva djeljivih sa 7.

146. U pravouglom trouglu visina i težišna duž iz tjemena pravog ugla grade sa katetama jednake uglove. Dokazati.

VII razred

147. Broju 1 988 dopisati tri cifre zdesne strane da bi tako dobiveni sedmocifreni broj bio djeljiv i sa 7 i sa 8 i sa 9.

148. Odrediti četverocifreni broj $\overline{ROMB}$, ako važi jednakost

$$(R + O + M + B)^4 = \overline{ROMB},$$

149. Ako je zbir dva cijela broja djeljiv sa 10, tada se kvadrati tih brojeva završavaju istim ciframa. Dokazati.

150. U četverouglu $ABCD$ je

$$AB = 6\ cm, AD = 4\ cm, \measuredangle A = \measuredangle B = 60^O \text{ i } \measuredangle D = 90^O.$$

Izračunati dužinu dijagonala i površinu datog četverougla.

151. Nad katetama pravouglog trougla ABC, kao nad prečnicima, konstruisani su krugovi. Zajednička tangenta dodiruje krugove u tačkama M i N tako da je $MN = 4\sqrt{6}\ cm$. Izračunati obim trougla ABC ako mu je jedna kateta tri puta duža od druge.

VIII razred

152. Odrediti skup svih vrijednosti realnog parametra a tako da jednačine

$$2(x-2a)+4-\frac{2-x}{2} \text{ i } 2(x-2a))-2x+2(a-1)$$

imaju rješenja manja od 10 i veća ili jednaka 2.

153. Za n proizvoljno izabranih brojeva utvrđeno je sljedeće:

a) trećina brojeva nije djeljiva sa 2;
b) dvije sedmine brojeva nije djeljivo sa 3;
c) 427 brojeva je djeljivo i sa 2 i sa 3;
d) petina brojeva nije djeljiva ni sa 2 ni sa 3.

Odrediti broj n.

154. Na svakoj stranici kvadrata date su četiri tačke tako da se nijedna od njih ne nalazi u tjemenima. Koliko ima trouglova određenih tim tačkama?

155. U pravouglom koordinatnom sistemu dvije prave prolaze kroz tačku $T(4,5)$ i sa osom Ox grade trougao površine $20\ cm^2$. Odrediti jednačine tih pravih ako jedna od njih prolazi kroz koordinatni početak.

156. Oko jednakokrakog trougla ABC (AB=AC) je opisan krug k. Iz tjemena A je konstruisana prava koja siječe stranicu BC u tački M, a krug k u tački N. Izračunati površinu kruga upisanog u trougao ABC ako je $AM\cdot AN$=25, a obim trougla ABC je 16 cm.

Opštinsko takmičenje 1999.

V razred

157. Dati su skupovi A={1,2,3,4,5}, B={1,4,6}, C={2,5,6,7} i D={1,6,7,8}. Odrediti skup S ako je $S\subset A$, $S\cap(B\cup D)=\emptyset$, $(A\cap C)\setminus S=\emptyset$ i $\{3\}\setminus S=\{3\}$.

158. Voćke su zasađene po 30 komada u redu. Da je zasađeno tri reda manje i da je u svakom redu po 35 voćki, onda bi u voćnjaku bilo 50 voćki više. Koliko je redova voćki zasađeno?

159. Ugao x predstavlja dvije trećine svog komplementarnog ugla. Ako je ugao y suplementan uglu x, koji dio od y iznosi ugao x?

160. Odrediti sve četverocifrene brojeve koji počinju cifrom 4, a završavaju cifrom 2 i djeljivi su sa 9.

VI razred

161. Koliko ima četverocifrenih brojeva čija je prva cifra paran broj, druga cifra prost broj, treća cifra neparan broj i četvrta cifra složen broj?

162. Razlomak $\frac{199}{140}$ napisati kao zbir tri razlomka sa jednocifrenim imeniocima.

163. Jedan radnik završi neki posao za 10 dana. Ako mu se priključi drugi radnik i pomogne mu u radu 2 dana, onda će posao biti završen za 6 dana. Za koliko bi dana posao završio drugi radnik?

164. U pravouglom trouglu hipotenuzine visina i težišna duž sijeku se pod uglom od 32^0. Odrediti ugao između hipotenuzine visine i simetrale pravog ugla.

VII razred

165. Broj telefona se sastoji od dva trocifrena broja od kojih je svaki djeljiv sa 45, a srednja cifra kod oba broja je 7. Odrediti broj telefona ako je prvi trocifreni broj manji od drugog.

166. Odrediti najmanju vrijednost izraza $A=x^2+y^2+z^2+4x-10z+1999$ i odgovarajuće vrijednosti za x, y i z.

167. Ako su a i b katete i h hipotenuzina visina pravouglog trougla, dokazati da važi $\frac{1}{h^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}$.

168. U jednakokrakom trapezu dužina manje osnovice i dužina kraka iznose 3 cm. Ugao između dijagonala je 60^0. Izračunati dužinu veće osnovice i dužinu dijagonale.

VIII razred

169. Naći vrijednost razlomka $\frac{a+b}{a-b}$ ako je $2a^2+2b^2=5ab$ i $0 < a < b$.

170. Osnova piramide je jednakokraki trapez čije su osnovice dužine 16 cm i 8 cm i visina 9 cm. Podnožje visine piramide je presječna tačka dijagonala osnove, a kraća bočna ivica je 13 cm. Izračunati zapreminu piramide.

171. Dokazati da zbir kvadrata pet uzastopnih prirodnih brojeva ne može biti kvadrat nekog prirodnog broja.

172. Naći sve parove (x,y) cijelih brojeva, takvih da je $2(x^2+y^2)=5(xy+1)$.

Regionalno takmičenje 1999.

V razred

173. Jedan trgovac je kupio robu za 51 210 dinara. Od toga je prodao $\frac{2}{3}$ sa $\frac{1}{20}$ zarade, a ostatak je prodao sa gubitkom od $\frac{1}{30}$. Koliko je ukupno zaradio?

174. Odrediti prirodne brojeve a i b za koje važi jednakost: $\frac{a}{6}-\frac{2}{b}=\frac{1}{30}$.

175. Duž AB je tačkom C podijeljena na dijelove čija je razlika 2 cm. Kolika je dužina duži AB, ako je središte manjeg dijela pet puta bliža tački A nego tački B.

176. Učenik je imao više od 3000 dinara, a manje od 4000 dinara. Ako bi dnevno trošio po 200 ili po 240 dinara, uvijek bi mu preostalo 50 dinara. Koliko je dinara imao?

VI razred

177. Dejan i Željko su imali ukupno 900 dinara. Kada je Dejan potrošio tri osmine svoje sume, a Željko tri desetine svoje sume, zaključili su da su potrošili trećinu ukupne sume. Koliko je novca imao svaki od njih?

178. Odrediti sve jednocifrene prirodne brojeve a, b, c tako da je $\frac{3}{a}+\frac{b}{7}=\frac{60+c}{56}$.

179. Jedan ugao trougla iznosi 80^0. Pod kojim se uglom sijeku simetrale ostala dva ugla?

180. U trouglu ABC tačka M je središte stranice AB. Prava p, koja prolazi kroz tačku M, paralelna je simetrali ugla ACB i presjeca pravu BC u tački D, a pravu AC u tački E. Dokazati da je trougao CDE jednakokraki.

VII razred

181. Za koje prirodne brojeve n zbir $n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+(n+3)^2$ je djeljiv sa 10?

182. Dužina osnovice jednakokrakog trougla je 5 cm, a dužina visine na krak je 4 cm. Odrediti površinu tog trougla.

183. Površina romba, izražena u cm^2, jednaka je jednom od rješenja jednačine:

$$\left(\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{3\cdot 4}+\cdots+\frac{1}{1997\cdot 1998}+\frac{1}{1998\cdot 1999}\right)\cdot|x-1|=23\cdot\frac{1998}{1999}.$$

Odrediti dužinu stranice romba ako je dužina jedne njegove dijagonale 6 cm.

184. Dokazati da je $x^{10}-x^5+x^2-x+1>0$ za svaki realan broj x.

VIII razred

185. Koliko treba uzeti sabiraka u zbiru: $1+2+3+\ldots+(n-1)+n$ da bi nakon obavljenog sabiranja rezultat bio trocifren broj čije su cifre jednake?

186. Osnova pravog paralelopipeda je romb, a površine dijagonalnih presjeka su P_1 i P_2. Izračunati površinu omotača tog paralelopipeda.

187. Dokazati da za bilo koji realni broj a važi nejednakost:

$$(a-1)(a-2)(a-3)(a-4)+1\geq 0$$

188. Neka je k krug nas prečnikom BD =12 cm i neka su A i C tačke tog kruga sa različitih strana prave BD. Ako je $\measuredangle DBA=60^0$ i $\measuredangle DBC=45^0$, izračunati dužinu tetive AC.

Republičko takmičenje 1999.

VI razred

189. Milan je uradio tri osmine nekog posla, a zatim je Marko dovršio taj posao, tako da je cijeli posao urađen za 12 dana. Za koliko bi dana isti posao uradili zajedno, ako se zna da bi Marko, radeći sam, morao da utroši 5 dana više nego što bi trebalo Milanu ako bi radio sam?

190. Zbir recipročnih vrijednosti tri cijela broja je 1. Odrediti sve trojke takvih brojeva.

191. Dat je pravougaonik $ABCD$. Iz jednog tjemena je konstruisana normala na dijagonalu. Ova normala dijeli ugao pravougaonika u razmjeri 3:1. Izračunati ugao između ove normale i druge dijagonale.

192. U trouglu ABC ugao kod tjemena B je 15^{0}, a ugao kod tjemena C je 30^{0}. Prava koja sadrži tjeme A normalna je na stranicu AB i siječe stranicu BC u tački D. Dokazati da je $BD=2AC$.

VII razred

193. Koji uslov zadovoljavaju realni brojevi a, b, c i d ako izraz

$$a^2+d^2-2b(a+c-b)+2c(c-d)$$

ima najmanju vrijednost?

194. Dužina srednje linije jednakokrakog trapeza je 4 dm, a visine 3 dm. Izračunati dužinu dijagonale.

195. Ako su dužine stranica pravouglog trougla cijeli brojevi, dokazati da je bar jedan od tih brojeva djeljiv sa 5.

196. Polinom $(x^2+x+1)(x^3+x^2+1)-1$ rastaviti na činioce, a zatim dokazati da on ima pozitivne vrijednosti za svako pozitivno x, a negativne za svako negativno x.

VIII razred

197. Četverocifreni broj je kvadrat nekog prirodnog broja. Umanji li se svaka njegova cifra za prirodan broj k, dobiće se broj koji je takođe kvadrat. Odrediti sve četverocifrene brojeve sa tim svojstvom.

198. U trougao ABC osnovice $a=6$ cm i visine $h=4$ cm upisan je pravougaonik najveće površine, čija jedna stranica leži na osnovici BC. Izračunati površinu pravougaonika i dužine njegovih stranica.

199. Dokazati da je $(x+y)(x+2y)(x+3y)(x+4y)+y^4 \geq 0$ za sve $x,y \in$ R.

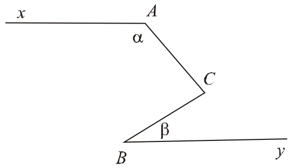
200. Osnova piramide je mnogougao kome je zbir unutrašnjih uglova 720^{0}. Odrediti zapreminu te piramide, ako je njena bočna ivica jednaka s i sa visinom piramide obrazuje ugao od 30^{0}.

Opštinsko takmičenje 2000.

V razred

201. Broj $n+100$ dijeljenjem sa 23 daje ostatak 17. Koliki je ostatak dijeljenja broja n sa 23?

202. Ako je na priloženoj slici $\alpha=110^{O}$, $\beta=32^{O}$ i $Ax||By$, izračunati $\sphericalangle ACB$.



203. U ravni je data prava p i različite tačke A, B, C, D. Konstruisati dva kruga K_1 i K_2 čija presječna tačka pripada pravoj p, a da krug K_1 sadrži tačke A i B, a krug K_2 sadrži tačke C i D.

204. Jednog dana u nekom odjeljenju sa nastave je bila odsutna jedna dvanaestina učenika. Sljedećeg dana je došao jedan od odsutnih tako je bila odsutna jedna osamnaestina učenika. Koliko učenika ima u tom odjeljenju?

VI razred

205. Naći sve jednocifrene brojeve a, b, c, tako da je: $\frac{2}{a}+\frac{b}{7}=\frac{30+c}{35}$.

206. U jednakokrakom trouglu ABC (AC=BC) simetrala ugla BAC i visina AD, koja odgovara kraku, sijeku se pod uglom od 15^{O}. Izračunati uglove trougla ABC.

207. Konstruisati trougao ABC ako je njegov obim O=12 cm, ugao $\alpha=60^{O}$ i visina h_c=3 cm.

208. Neki čovjek je rastojanje od mjesta A do mjesta B prešao brzinom od 4 km/h i ne zadržavajući se u B vratio se istim putem u mjesto A brzinom od 6 km/h. Kojom prosječnom brzinom se kretao taj čovjek?

VII razred

209. Odrediti oštre mjere uglova pravouglog trougla, ako je $\left(\frac{c}{a+b}\right)^2=\frac{1}{2}$, gdje su a i b dužine kateta, a c dužina hipotenuze.

210. Jedan četverocifreni broj ima sljedeća svojstva:

a) njegova prva cifra jednaka je drugoj, a treća jednaka četvrtoj,

b) taj četverocifreni broj je kvadrat jednog dvocifrenog broja.

Odrediti taj četverocifreni broj.

211. Dužina visine jednakokrakog trapeza je 4 cm, središte veće osnovice je centar opisanog kruga, a dužina poluprečnika je 5 cm. Izračunati površinu tog trapeza.

212. Ako su p i q dva uzastopna prirodna broja i t njihov proizvod, dokazati da je $p^2+q^2+t^2$ potpun kvadrat.

VIII razred

213. Koje cifre treba staviti umjesto slova a, b, c, d tako da bude tačna jednakost: $\overline{abcd}+\overline{abc}+\overline{ab}+a=4321$? (Različitim slovima odgovaraju različite cifre, a istim slovima odgovaraju iste cifre.)

214. Data je funkcija $y=(m^2-2)x+4m^2-8$.

a) Izračunati m tako da tačka A(–3,7) pripada grafiku funkcije.

b) Za $m=\sqrt{3}$ izračunati odstojanje koordinatnog početka od odgovarajuće prave.

215. Naći sve parove (x,y) cijelih brojeva, takvih da je $xy+7x-3y=25$.

216. Osnova piramide $ABCS$ je jednakostraničan trougao ABC koji je okomit na trougao BCS osnovu. Izračunati površinu i zapreminu te piramide, ako je stranica osnove a.

Regionalno takmičenje 2000.

V razred

217. Dat je šestocifreni broj n. Ako je razlika brojeva koju čine njegove prve tri cifre (bez promjene poretka cifara) djeljiva sa 7, dokazati da je onda i sam broj n djeljiv sa 7.

218. Duž AB podijeljena je tačkom C na dijelove čije se dužine razlikuju za 1 cm. Izračunati dužinu duži AB ako je središte manjeg dijela pet puta bliže tački A nego tački B.

219. Dvije prave a i b obrazuju sa trećom pravom uglove od 73° i 130°. Odrediti ugao koji obrazuju prave a i b. Koliko ima rješenja?

220. Dvanaest hljebova podijeljeno je na dvanaest osoba. Svaki čovjek je dobio dva hljeba, svaka žena po pola, a svako dijete po četvrtinu hljeba. Koliko je bilo ljudi, koliko žena, a koliko djece?

VI razred

221. Odrediti najmanji racionalan broj $\frac{a}{b}$ koji dijeljenjem sa racionalnim brojevima $\frac{35}{396}$ i $\frac{28}{297}$ daje količnik cijeli broj.

222. Odrediti cifre x, y, z tako da je $\frac{1}{x+y+z}=\overline{0,xyz}$.

223. Pokazati da u pravouglom trouglu težišna duž i visina, koje odgovaraju hipotenuzi, obrazuju ugao jednak razlici oštrih uglova tog trougla.

224. Pokazati da se jednakostranični trougao stranice 3 cm može podijeliti na tri disjunktna trougla kod kojih ni jedna stranica nije manja od 1 cm.

VII razred

225. Dokazati da važi nejednakost $a(a+b)+b(b+c)+c(c+a)\geq 0$, za sve realne brojeve a, b i c.

226. Visina AA_1 koja odgovara osnovici BC jednakokrakog trougla ABC ima dužinu 20 cm, a visina BB_1 koja odgovara kraku AC trougla dužine 24 cm. Odrediti obim i površinu tog trougla.

227. Odrediti trocifrene brojeve $\overline{abc}$ tako da važi $\frac{a+b}{2}=\frac{b+c}{3}=\frac{c+a}{5}\in N$.

228. Odrediti trocifrene brojeve n, tako da je broj $a=n^2+n+1$ djeljiv sa 13.

VIII razred

229. Grupa dječaka i djevojčica sakupila je 230 KM za rođendanski poklon svom drugu. Dječaci su davali po 20 KM, a djevojčice po 30 KM. Koliko je bilo dječaka, a koliko djevojčica, ako je grupa imala neparan broj članova?

230. U trouglu ABC ($\sphericalangle BAC<90^{\circ}$) težišna duž BM, $M\in AC$, i visina CN, $N\in AB$, imaju jednake dužine. Neka se BM i CN sijeku u tački P. Dokazati da je $BP=2\cdot PN$.

231. Odrediti posljednju cifru prirodnog broja $a=5^n+6^n+7^n$, $n\in\mathbb{N}$.

232. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu $x^2+5z^2+5z^2-4xz-2y-4zy+1=0$.

Republičko takmičenje 2000.

VI razred

233. Odrediti šestocifreni broj čiji su proizvodi sa 2, 3, 4, 5 i 6 takođe šestocifreni brojevi, a koji imaju iste cifre kao i traženi broj.

234. U tri košare se nalazi ukupno 300 jabuka. Ako iz prve uzmemo jednu trećinu, iz druge tri petine i iz treće tri četvrtine, onda ćemo uzeti ukupno 160 jabuka. Koliko bismo imali jabuka da smo uzeli samo dvije petine iz druge i pet osmina iz treće košare?

235. Kroz tjeme C trougla ABC konstruisati pravu p koja nema drugih zajedničkih tačaka sa trouglom, tako da zbir rastojanaj tjemena B i C od prave p bude najveći.

236. Ako je dužina manje osnovice trapeza jednaka zbiru dužina krakova, dokazati da se simetrale unutrašnjih uglova na većoj osnovici sijeku u tački koja pripada manjoj osnovici.

VII razred

237. Dokazati da za bilo koje realne brojeve a i b važi $a^2+ab+b^2\geq 3(a+b-1)$.

238. Odrediti sve parove pravilnih mnogouglova kod kojih je odnos unutrašnjih uglova 4 : 3.

239. Dat je kvadrat $ABCD$ čija je površina 256 cm^2. Na stranici AD odabrana je tačka E, a na produžetku stranice CD, preko tjemena C, odabrana je tačka F, tako da je $\sphericalangle EBF$ prav. Odrediti dužinu duži CF, ako je površina trougla EBF 200 cm^2?

240. Svaka tačka unutrašnjosti i svaka tačka stranica jediničnog kvadrata je obojena sa tačno jednom od dvije boje – crvenom ili plavom. Dokazati da uvijek, postoje dvije tačke, koje su obojene istom bojom, a čije međusobno rastojanje je d, gdje je $d\geq\frac{\sqrt{5}}{2}$.

VIII razred

241. Odrediti cijele brojeve x, y, z tako da važi $x+y+z=4$ i $xy+yz+zx+z=7$.

242. Na stranici AB trougla ABC izabrana je tačka E tako da je $AE : EB = 1 : 3$, a na stranici BC tačka D tako da je $CD : DB = 1 : 2$. Ako AD siječe CE u tački F, izračunati $\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD}$.

243. Ako su a, b, c pozitivni realni brojevi i $abc=3$, dokazati da važi nejednakost $(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 \geq 72$. Kada važi jednakost?

244. U datom pravougaoniku $ABCD$ izabrana je proizvoljna tačka M i kroz nju su konstruisane dvije prave, paralelne stranicama pravougaonika. One dijele pravougaonik na četiri manja pravougaonika. Dokazati da bar jedan od dva pravougaonika, koji sadrži tačke A ili C, ima površinu koja nije veća od jedne četvrtine površine P cijelog pravougaonika.

Opštinsko takmičenje 2001.

V razred

245. Ako broj n podijelimo brojem 18 dobijamo količnik m i ostatak 8. Odrediti količnik i ostatke dijeljenja broja n sa: 9; 6 i 3.

246. Dvije prave se sijeku i obrazuju četiri ugla. Zbir unutrašnjih oštrih uglova jednak je polovini jednog od unakrsnih tupih uglova. Odrediti mjerni broj svakog od tih uglova.

247. Date su tačke M i N. Konstruisati ugao od 60^{O} tako da tačka M pripada jednom, a tačka N drugom kraku ugla.

248. Ana ima tri brata. Prvi je stariji od nje tri godine, drugi je mlađi od nje tri godine, a treći je tri puta mlađi od Ane. Njihov otac je tri puta stariji od Ane. Koliko godina ima svako od njih, ako zajedno imaju 95 godina.

VI razred

249. Šestocifreni broj ima na mjestu jedinica cifru 7. Ako se ta cifra premjesti na najviše mjesto dobije se broj pet puta veći. Koji je to broj?

250. U jednakokrakom trouglu simetrala spoljašnjeg ugla na vrhu i simetrala unutrašnjeg ugla na osnovici sijeku se pod uglom od 32^{O}. Izračunati uglove tog trougla.

251. Dijagonala AC paralelograma $ABCD$ jednaka je 24 cm. Ako je N središte stranice AB, a M tačka u kojoj duž DN presjeca dijagonalu AC, odrediti dužinu duži AM.

252. U svakoj od dvije posude nalazi se po 540 litara vode. Iz prve posude ističe 25 litara u minuti, a iz druge 15 litara u minuti. Poslije koliko minuta će u drugoj posudi ostati vode šest puta više nego u prvoj?

VI razred

253. Ako je $A(x,y)=2x^2+2xy+y^2-2x+2y+7$.

a) Dokazati da je $A(x,y)>0$, za svaki x, $y\in R$.

b) Za koje vrijednosti promjenljivih x i y izraz $A(x,y)$ ima najmanju vrijednost i kolika je ta vrijednost?

254. Odrediti sve prirodne brojeve x i y za koje važi: $x-y=84$ i $D(x,y)=12$, gdje je $D(x,y)$ najveći zajednički djelilac brojeva x i y.

255. U trouglu ABC dužina stranice AB je $c=30\ cm$, dužina visine $h_c=15\ cm$, a dužina težišne duži $t_c=17\ cm$. Odrediti dužine stranica trougla ABC.

256. Izračunati obim i površinu jednakokrakog trougla čija je visina na osnovicu $h=16\ cm$, a poluprečnik upisanog kruga $r=6\ cm$.

VIII razred

257. Odrediti sve parove (x,y) cijelih brojeva za koje je $2x^2+3xy+y^2+1=0$.

258. Tetiva CD kruga opisanog oko jednakokrakog trougla ABC siječe AB u tački E. Ako je $AC=BC=14\ cm$ i $CE=10\ cm$, izračunati dužinu tetive CD.

259. Kroz četiri cijevi jednakih prečnika napuni se neki bazen za 9 sati ako su sve četiri cijevi uključene istovremeno. Ali, one nisu uključene istovremeno, nego su uključivane jedna za drugom u jednakim vremenskim razmacima od t sati. Tako je napunjen bazen u momentu kada je prva cijev pet puta duže punila bazen nego posljednja. Za koliko je sati napunjen bazen ako se kroz svaku cijev bazen puni istom brzinom?

260. Ravan α siječe pravilnu šestostranu prizmu po dijagonalama dvaju naspramnih bočnih strana. Presjek je kvadrat stranice 6 cm. Izračunati zapreminu te šestostrane prizme.

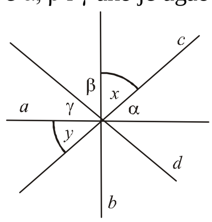
Regionalno takmičenje 2001.

V razred

261. Odrediti trocifrene brojeve $\overline{abc}$, tako da je broj $\overline{579abc}$ djeljiv sa 5, 7, i 9.

262. Mirko je uštedio izvjesnu svotu novca. On je na početku svakog mjeseca trošio 10 KM, a od roditelja je dobijao trećinu sume kojom je u tom trenutku raspolagao (poslije utrošenih 10 KM). Poslije tri mjeseca je utvrdio da se njegova ušteđevina udvostručila. Kolikoje novaca imao Mirko na početku?

263. Date su četiri prave a, b, c i d, koje se sijeku u jednoj tački, pri čemu je $a\perp b$ i $c\perp d$, slika. Odrediti uglove α, β i γ ako je ugao x četiri petine ugla y.



264. Date su paralelne prave a i b. Na pravoj a su date tačke A, B, D, E, a na pravoj b tačke M, N, P, Q. Koliko: a) duži, b) trouglova, c) konveksnih četverouglova određuje ovih devet tačaka?

VI razred

265. Dokazati da je proizvod $\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{10}\right)\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot\cdots\cdot 100$ djeljiv sa 101. Generalizirati.

266. Cijena ulaznica za fudbalsku utakmicu je bila 9 KM. Pošto je cijena snižena, broj posjetilaca se povećao za 50%, a prihod je povećan za 25%. Kolika je bila cijena ulaznice poslije sniženja?

267. U ravni su date četiri različite tačke: A, B, C i D. Ako je $AB\perp CD$ i $AC\perp BD$, dokazati da je $AD\perp BC$.

268. Tačka M je jednako udaljena od paralelnih pravih a i b. Kraci pravog ugla sa tjemenom u M sijeku prave a i b u tačkama A i B. Dokazati da rastojanje tačke M od prave određene tačkama A i B ne zavisi od položaja krakova pravog ugla.

VII razred

269. Naći sve trocifrene brojeve koji su 33 puta veći od zbira svojih cifara.

270. U jednakokrakom trapezu dužina kraka je 3 cm i dužina manje osnovice je 3 cm. Ugao između dijagonala je 60°. Kolika je dužina veće osnovice i dužina dijagonale trapeza?

271. Da li broj 101010 može da se napiše u obliku razlike kvadrata dvaju prirodnih brojeva?

272. Dokazati da je zbir dijagonala konveksnog petougla veći od njegovog obima, a manji od dvostrukog obima.

VIII razred

273. Data je prava p jednačinom $y=kx+n$, gdje je par (k,n) rješenje jednačine $9x^2+y^2+24x-8y+32=0$. Izračunati:

a) površinu koju prava p ograničava sa koordinatnim osama;

b) rastojanje koordinatnog početka od prave p.

274. U pravouglom trouglu ABC ($\sphericalangle C=90^{\circ}$) konstruisane su simetrale AD i BF uglova, $D\in BC$ i $F\in AC$. Iz tačaka D i F konstruisane su normale DN i FM na hipotenuzu. Odrediti veličinu ugla MCN.

275. Dokazati da je tačna nejednakost $3(1+a^2+a^4)>(1+a+a^2)^2$, za svaki realni broj a, $a\neq 1$.

276. U krugu poluprečnika $r=5$ cm upisan je jednakokraki trougao kod koga je zbir osnovice i njene visine jednak prečniku kruga. Izračunati dužinu ove visine.

Republičko takmičenje 2001.

VI razred

277. U jednoj školi ima manje od 400 učenika. Šest odjeljenja imaju jednak broj učenika i u tih šest odjeljenja ima više od 150 učenika. U ostalim odjeljenjima ima ukupno za 15% učenika više nego u ovih šest odjeljenja. Koliko je ukupno učenika u ovoj školi?

278. Milan je uradio tri petine posla, a zatim je Marko završio taj posao tako da je cijeli posao urađen za 12 dana. Za koliko bi dana taj posao zajedno uradili, ako se zna da bi Marko radeći sam morao utrošiti 5 dana više nego Milan radeći sam?

279. Neka je O ortocentar oštrouglog trougla ABC. Odrediti ugao kod tjemena C, ako je $CO=AB$.

280. Jedan ugao jednakokrakog trougla je 108^{O}. Dokazati da je odsječak simetrale ugla na osnovici od tjemena do presjeka sa krakom, dva puta duži od visine koja odgovara osnovici.

VII razred

281. Dat je polinom $P(x)=x^3+7x^2-5x-75$.

a) Napisati polinom $P(x)$ u obliku proizvoda prostih polinoma.

b) Dokazati da je za svaki neparan prirodan broj n izraz $P(n)$ djeljiv sa 8.

282. Dokazati nejednakost $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}<\frac{1}{100}$.

283. Jedan šestocifren broj počinje cifrom 1. Ako se ta cifra premjesti na posljednje mjesto, tj. da postane cifra jedinica (ne mijenjajući pri tom poredak drugih cifara), tada će dobijeni broj biti tri puta veći od prvobitnog. Odrediti taj prvobitni broj.

284. Srednja linija jednakokrakog trapeza je 4 cm, a visina 3 cm. Izračunati dužinu dijagonale tog trapeza.

VIII razred

285. Data je funkcija $y=\left(2a-3b-\frac{4}{3}\right)x+4a-6b+4$.

a) Nacrtati grafik ove funkcije za one vrijednosti a i b za koje izraz $A=\frac{2}{4a^2-12ab+9b^2+4}$ ima najveću vrijednost.

b) Odrediti zapreminu tijela koje nastaje rotacijom oko najduže stranice onog trougla, kojeg gradi grafik funkcije sa koordinatnim osama.

286. U trouglu je odnos visina $h_a : h_b : h_c = 6 : 4 : 3$, a obim trougla 9 cm. Izračunati dužine stranica a, b, c trougla.

287. Naći sve parove prirodnih brojeva sa svojstvom: zbir dva broja u takvom paru jednak je 10% njihovog proizvoda.

288. Neka je $ABCV$ jednakoivična trostrana piramida sa ivicom dužine a. Ako je tačka P polovište (središte) visine te piramide, povučene iz vrha V na bazu ABC, dokazati da su duži AP, BP i CP međusobno normalne.

Opštinsko takmičenje 2002.

V razred

289. Od dva zadana prirodna broja formiraju se novi brojevi na sljedeći način: prvom se doda drugi i dobije se treći, zbir drugog i trećeg je četvrti broj itd. Odrediti zbir prvih šest tako formiranih brojeva ako je peti broj 7.

290. Ribar je ulovio soma čiji je rep bio težak 2 kg, a glava koliko i rep i pola trupa, a trup koliko glava i rep zajedno. Koliko je bio težak ulovljeni som?

291. Na duži MN izabrane su redom tačke A, B, C i D tako da je $AB=BC=CD$. Rastojanje između središta duži AB i CD je 28 cm, a rastojanje između središta duži MA i DN je 51 cm. Kolika je dužina duži MN?

292. Od 100 ljudi 10 ne zna ni jedan strani jezik, 75 ih zna njemački, a 85 zna francuski jezik. Koliko ih zna oba jezika: francuski i njemački?

VI razred

293. Odrediti sve prirodne brojeve koji su djeljivi sa 8, a čiji je zbir cifara 7 i proizvod cifara 6.

294. Naći razlomak jednak $\frac{3}{8}$, kod kojeg zbir njegovog brojioca i imenioca iznosi 374.

295. Radnik A bi završio neki posao za 8 sati, a radnik B za 4 sata. Koliko dugo su radili zajedno ako je radnik B ostatak posla završio za 1 sat.

296. Tačka M je jednako udaljena od paralelnih pravih a i b. Kraci pravog ugla sa vrhom u tački M sijeku date prave redom u tačkama A i B. Dokazati da rastojanje tačke M od prave AB ne zavisi od položaja krakova pravog ugla.

VII razred

297. a) Rastaviti na proste činioce polinom $P(x)=2x^3+5x^2+2x$.

b) Odrediti najveći prirodni broj kojim su djeljivi svi brojevi $P(x)$ ako x∈{2,3}.

298. Odrediti minimalnu vrijednost polinoma $x^2+y^2-6x+4y+1013$. Za koje vrijednosti promenljivih polinom dostiže minimum?

299. Ako se broj stranica pravilnog mnogougla poveća za 3, tada se njegov spoljašnji ugao smanji za 10^{O}. Koliko dijagonala ima taj mnogougao?

300. U trapezu $ABCD$ dužine dijagonale su: d_1=15 cm i d_2=20 cm i visine h=12 cm. Izračunati površinu trapeza.

VIII razred

301. Prva cifra šestocifrenog prirodnog broja je 9. Ako tu cifru premjestimo s prvog na posljednje mjesto, dobićemo broj koji je 4 puta manji od prvobitnog broja. Odrediti prvobitni broj.

302. Odrediti dvije linearne funkcije čiji grafici sadrže tačku $T(4,3)$ ako jedna od njih prolazi kroz koordinatni početak, a sa osom Oy zatvaraju trougao površine 10 cm^2. (Jedinična duž na koordinatnim osama je 1 cm.)

303. Osnovne ivice pravog paralelopipeda su 5 cm i $3\sqrt{2}\ cm$. Ugao između osnovnih ivica je 45°. Izračunati zapreminu paralelopipeda ako je njena manja dijagonala dužine 7 cm.

304. U trapezu $ABCD$ dužina srednje linije je 13 cm, $\sphericalangle ADC \cong \sphericalangle ACB$ i osnovice AB i CD se odnose kao 4 : 9. Odrediti dužinu dijagonale AC.

Regionalno takmičenje 2002.

V razred

305. Na takmičenju iz matematike učenici su rješavali tri zadatka. Svaki učenik je riješio bar jedan zadatak. Prvi zadatak riješilo je 25 učenika, drugi 27 učenika, a oba zadatka riješilo je 20 učenika. Niko nije riješio treći zadatak.

a) Koliko je učenika učestvovalo na takmičenju?
b) Koliko je učenika riješilo samo prvi zadatak?

306. Odrediti sve razlomke sa jednocifrenim imeniocima od kojih je svaki veći od $\frac{7}{9}$, a manji od $\frac{8}{9}$.

307. Odrediti ugao koji je od svog suplementnog ugla manji za onoliko za koliko je veći od svog komplementnog ugla.

308. Nekoliko radnika bi radeći zajedno sve vrijeme, mogli završiti jedan posao za 24 dana. Međutim, posao je započeo jedan radnik, a ostali su pristupali poslu jedan za drugim, i to u jednakim vremenskim razmacima. Svaki od njih je radio cio broj dana sve do završetka posla. Za koje vrijeme su završili posao ako je prvi (onaj koji je započeo posao) radio pet puta duže nego radnik koji je posljednji pristupio poslu, a pretposljednji dva puta duže nego posljednji?

VI razred

309. Neki šestocifreni broj počinje cifrom 2. Ako bi se ta cifra premjestila na posljednje mjesto dobio bi se broj tri puta veći od prvobitnog. Odrediti taj šestocifreni broj.

310. Radnici A i B mogu završiti neki posao za 20 dana, radnici A i C za 15 dana, a radnici B i C za 12 dana. Za koliko bi dana svaki od njih završio taj posao?

311. Na tetivi AB kruga sa centrom O odabrana je proizvoljna tačka M. Kružnica koja sadrži tačke A, M i O siječe prvu kružnicu u tačkama A i C. Dokazati da je $MB=MC$.

312. Tačke E i F su središta stranica AB i CD pravougaonika $ABCD$. Dokazati da presječne tačke duži CE i CF i dijagonale BD tog pravougaonika dijele tu dijagonalu na tri jednaka dijela.

VII razred

313. Ako četverocifreni broj napišemo obrnutim redom cifara, novi četverocifreni broj biće devet puta veći. Koji četverocifreni broj ima to svojstvo?

314. Dat je polinom $P(x)=x^3+3x^2-x-3$.

a) Rastaviti P(x) na proste činioce.

b) Dokazati da je $P(x)$ djeljivo sa 48 ako je x prirodan neparan broj.

315. U pravouglom trouglu dužina hipotenuze je 4 cm, a mjerni brojevi oštrih uglova odnose se kao 2 : 1. Izračunati dužinu hipotenuzine visine tog trougla.

316. Ako su r_1, r_2, r_3 ostaci dijeljenja broja a redom brojevima 3, 5, 7, dokazati da je broj $70r_1+21r_2+15r_3-a$ djeljiv sa 105.

VIII razred

317. Goran je ušao u prodavnicu sa namjerom da kupi bicikl i planirao je da potroši pet šestina novca koji je dobio od roditelja. Pri kupovini sazna da je bicikl pojeftinio za 10%. Goran uzme bicikl, časti trgovca sa 5% od ostatka i ostane mu još 76 KM. Koliko je novca ponio Goran?

318. Odrediti obim pravouglog trougla ABC površine 54 cm^2, čije stranice povezuje relacija $2b=c+a$, gdje je c dužina hipotenuze, a i b dužine kateta.

319. Odrediti sve parove cijelih brojeva (x,y) tako da važi $x^2-xy-2y^2=18$.

320. Pravilna četverostrana piramida $SABCD$ s vrhom S presječena je sa tri ravni, od kojih jedna prolazi kroz tačke S, A, M, druga kroz tačke S, A, N i treća kroz tačke S, M, N, gdje je tačka M središte osnovne ivice BC, a N središte od CD. Odrediti zapreminu dobijene trostrane piramide $SAMN$, ako je osnovna ivica piramide $SABCD$ 6 cm, a njena visina 10 cm.

Republičko takmičenje 2002.

VI razred

321. Dokazati da ne postoje prirodni brojevi m i n, $m>n$, koji se zapisuju istim ciframa ali u različitom redosljedu, takvi da je $m-n=2002$.

322. Odrediti najmanji broj članova grupe učenika, ako je u toj grupi više od 70% dječaka i bar dvije djevojčice.

323. Na osnovici AB jednakokrakog trougla ABC data je proizvoljna tačka N. Prava n, koja sadrži tačku N i normalna je na osnovicu siječe prave BC i AC redom u tačkama P i Q. Ako je CD visina na osnovicu trougla dokazati da je $NP+NQ=2CD$.

324. Iz jednog tjemena oštrog ugla, koji nije jednakostraničan, konstruisana je visina, iz drugog simetrala ugla, a iz trećeg težišna duž. Njihove presječne tačke su tjemena novog trougla. Dokazati da taj trougao ne može bit jednakostraničan.

VII razred

325. Odrediti trocifrene brojeve $\overline{abc}$ koji su pet puta veći od proizvoda svojih cifara.

326. Dat je polinom $P(x,y,z)=x^2+4y^2+25z^2-8x+28y-30z+2076$.

a) Dokazati da ovaj polinom ima pozitivne vrijednosti za svaku realnu vrijednost promjenljivih x, y i z.

b) Odrediti vrijednost promjenljivih za koje polinom ima najmanju vrijednost. Kolika je ta najmanja vrijednost?

327. U jednakokrakom trouglu ABC, s osnovicom AB, kroz centar O upisane kružnice konstruisana je prava p paralelna osnovici, koja siječe krak AC u tački M, a krak BC u tački N.

a) Dokazati da je $MN=AM+BN$.

b) Odrediti obim trougla ABO ako je $\sphericalangle AMN=120^{\circ}$, a rastojanje od tačke O do osnovice d.

328. Na stranici AB trougla ABC odabrana je tačka D tako da su obimi trouglova ABC, ACD i BCD redom 60 cm, 55 cm i 45 cm. Odredi duž CD.

VIII razred

329. Saberemo li svaka dva od četiri racionalna broja a, b, c, d dobićemo šest zbirova: 1, 2, 5, 6, 9, 10. Odredi te brojeve ako se zna da je $a<b<c<d$.

330. Odrediti sve cijele brojeve a za koje je izraz $\frac{a^2+1}{a-1}$ takođe cijeli broj.

331. Dužine osnovica trapeza $ABCD$ su a i b ($a<b$). Odrediti dužinu duži MN, $M\in AD$, $N\in BC$, koja je paralelna osnovicama trapeza i koja dijeli trapez na dvije figure jednakih površina.

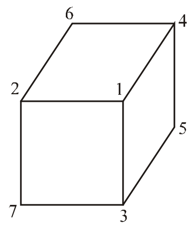
332. Baza piramide je romb stranice a, sa oštrim uglom 60°. Podnožje visine piramide je sjecište dijagonala romba. Kraća bočna ivica piramide jednaka je osnovnoj ivici. Izračunati, u funkciji od a, površinu i zapreminu te piramide.

Opštinsko takmičenje 2003.

V razred

333. Dragana, Mira i Sanja koračaju ulicom. Dužine njihovih koraka su 75 cm, 45 cm i 60 cm. Ako su započele koračanje desnom nogom i kreću se istom brzinom, koliko će koraka načiniti svaka od njih do prvog trenutka kada opet sve tri zajedno započnu korak desnom nogom?

334. Brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 raspoređeni su prema slici tako da zbir brojeva u tjemenima svakog četverougla iznosi 13. Rasporedi ove brojeve tako da zbir brojeva u tjemenima svakog od ova tri četverougla iznosi 16. Koliko ima rješenja?



335. Učenik je pročitao polovinu knjige i još 15 stranica i ostalo mu je još da pročita trećinu knjige. Koliko stranica je imala knjiga?

336. Neka su α i β uglovi sa uzajamno normalnim kracima i α je za 15^{O} 30'18'' veći od β.

a) Izračunati mjere uglova α i β;

b) Nacrtati sliku.

337. Iz dva grada jedan drugom u susret pođu istovremeno dva automobila. Jedan je prelazio za svaka 4 časa 280 km, a drugi za svaka 3 časa 330 km. Koliko je rastojanje između ta dva grada ako su se automobili sreli poslije 7 časova?

VI razred

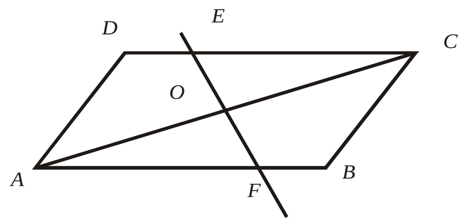
338. Izračuanti zbir svih dvocifrenih prirodnih brojeva?

339. Dvije prave u ravni nisu paralelne i na slici bi se sjekle u tački van lista na kojem je slika nacrtana. Treća prava p siječe ove dvije prave. Odrediti na pravoj p tačku T koja je jednako udaljena od datih pravih i nalazi se u oblasti ugla čiji su kraci djelomično nacrtani.

340. Uprostiti izraz $\frac{1}{9}a + \frac{4}{5}b + \frac{2}{3}a - \frac{3}{10}b$ i izračunati njegovu vrijednost ako je $a = \frac{3}{7}$ i $b = -\frac{2}{3}$.

341. Priča se da je na pitanje koliko ima učenika, Pitagora odgovorio: „Polovina mojih učenika uči matematiku, četvrtina muziku, sedmina ćuteći razmišlja, a osim toga imam još tri učenika." Koliko je učenika imao Pitagora, koliko ih uči matematiku, koliko muziku, a koliko ćuti?

342. U paralelogramu $ABCD$ kroz središte O dijagonale AC povučena je duž EF. Dokaži da je $EO = OF$.



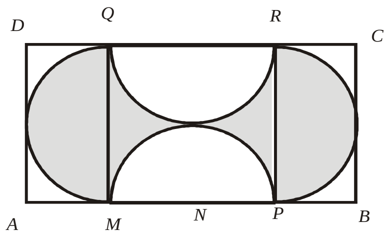
VII razred

343. Od neke sume najprije se oduzme 5%, za zajedničke potrebe ostavi 90 KM, a ostatak se podijeli na tri jednaka dijela. Kolika je ukupna suma, ako svaki dio iznosi 160 KM?

344. Paralelne stranice jednakokrakog trapeza $ABCD$ su $AB = a\ cm$ i $CD = b\ cm$, a ugao na većoj osnovici je 60°. Izračunati obim tog trapeza.

345. Tačka E je središte stranice BC kvadrata $ABCD$. Izračunaj obim i površinu tog kvadrata ako je $AE = 4\sqrt{5}\ \ cm$.

346. Odrediti površinu osjenčene figure na slici, gdje je $ABCD$ pravougaonik i $AM=MN=NP=PB=\frac{a}{4}$ i $AD=AN$, u funkciji od a.



347. Dat je polinom $P(x)=x^3+5x^2+3x-9$:

a) Rastaviti polinom na proizvod prostih činioca.

b) Dokazati da je za svaki neparan prirodan broj x izraz $P(x)$ djeljiv sa 8.

VIII razred

348. Ugao diedra je 60°. Tačka M uzeta je u unutrašnjosti diedra tako da su njene projekcije na strane diedra udaljene od ivice diedra 24 cm. Odrediti udaljenost tačke M od ivice diedra?

349. Ako se od nekog broja oduzme njegova polovina umanjena za 3,5 dobije se isto kao kada se dvostrukoj vrijednosti tog broja doda 15. Koji je to broj?

350. Obim trougla je 90 cm. Stranica b je za 10 cm kraća od stranice a i za 5 cm kraća od stranice c. Izračunati dužinu stranice njemu sličnog trougla, čiji je obim 72 cm.

351. Dat je paralelogram $ABCD$. Ako tjeme D spojimo sa središtima stranica AB i BC, onda te duži dijele dijagonalu AC na tri jednaka dijela. Dokazati.

352. Ne računajući proizvod, odrediti sa koliko se nula završava proizvod svih prirodnih brojeva od 1 do 49.

Regionalno takmičenje 2003.

V razred

353. Ako u nekom mjesecu 3 utorka padaju u parne datume, kog datuma pada posljednji petak u tom mjesecu?

354. Uglovi α i β imaju paralelne krake. Koliki je zbir uglova α i β ako je ugao α=2003 minute.

355. Proizvod dva broja je 2652. Ako prvi broj umanjimo za 2, proizvod će biti 2244. O kojim brojevima je riječ?

356. Koliko ima različitih pravougaonika sa cjelobrojnim stranicama (u cm):
a) čiji je obim 2002 cm;
b) čija je površina 2002 cm^2 ?

357. U ribnjaku se nalazi 25 gladnih štuka. Jedna štuka, da bi se zasitila, mora da pojede 3 štuke (bilo kakve, gladne ili site). Koliko je najviše moguće da ostane štuka u ribnjaku, a da sve štuke koje ostanu budu site?

VI razred

358. Na svakom kilometru puta između mjesta A i B, kao i u tim mjestima, nalazi se stub sa tablom. Na jednoj strani table napisano je koliko je kilometara do mjesta A, a sa druge strane koliko je kilometara do mjesta B. Putujući iz A u B , Milica je primjetila da je suma cifara na svakom stubu jednaka 13. Koliko je rastojanje u kilometrima između mjesta A i B?

359. Jedan ugao pravouglog trougla je 2003 minuta. Izračunaj ugao koji grade visina i težišna duž koje odgovaraju hipotenuzi u tom trouglu.

360. Neka su M_a, M_b, M_c središta stranica, a H_a, H_b i H_c podnožja visina trougla ABC, površine S. Dokazati da su duži M_aH_b, M_bH_c, M_cH_a stranice nekog trougla, a zatim odrediti površinu takvog trougla.

361. Razlika četverocifrenog broja i broja napisanog istim ciframa samo u obrnutom poretku je 90. Od svih takvih brojeva odrediti onaj čija je suma cifara hiljada i jedinica najmanja moguća, a suma cifara stotina i desetica najveća moguća.

362. Dati su brojevi A, B i C, takvi da je svaki od njih veći od 0 i manji od 1. Ako je A najveći od brojeva A, B i C, dokazati da je $1-(1-A)(1-B)(1-C) > A$.

VII razred

363. Nad Sjevernim polom istovremeno su tri Zemljina satelita. Prvi obiđe Zemlju za 90 minuta, drugi za 105 minuta, a treći za 2 časa. Koliko puta će prvi satelit obići Zemlju do trenutka kada prvi put sva tri satelita budu ponovo nad Sjevernim polom?

364. Primjenjujući odgovarajuće formule, pojednostaviti izraz:

$$A = [\,(4a+5b)^2]^2 - [(4a-5b)^2]^2 - 160ab\,(4a-5b)^2.$$

Izračunati vrijednost izraza A za $a=-1$ i $b=-2$.

365. Prilikom pismenog rada iz matematike 12% učenika u razredu nije riješilo zadatak, 32 % učenika je djelimično riješilo, a ostatak od 14 učenika zadatak je tačno riješilo. Koliko je učenika bilo u razredu?

366. Pokazati da je površina trougla cijeli broj, ako su mjerni brojevi njegovih stranica 13, 14 i 15.

367. U kvadrat stranice a upisan je drugi kvadrat čija tjemena leže na stranicama prvog ali tako da stranice zadanog i upisanog kvadrata čine ugao od 30°. Koji dio površine datog kvadrata čini površina upisanog kvadrata? Izraziti taj odnos u procentima.

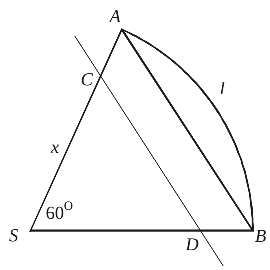
VIII razred

368. Buba se kreće po pravoj tako da za jedan minut napravi ili 47 koraka udesno ili 37 koraka ulijevo. Odrediti najmanji mogući cijeli broj minuta poslije kog će se buba naći jedan korak udesno od svoje polazne pozicije.

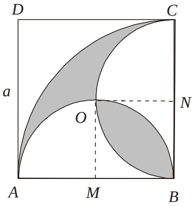
369. Motociklist je pošao iz mjesta A u mjesto B, gdje bi trebalo da stigne u određeno vrijeme. Ako bude išao brzinom 35 km/h, zakasniće 2 sata. Ako bude išao brzinom 50 km/h , stići će jedan sat ranije. Odrediti udaljenost između mjesta A i B.

370. U nizu od 6 prirodnih brojeva, treći i svaki sledeći je jednak zbiru dvaju prethodnih. Izračunati zbir tih 6 brojeva, ako je peti jednak 7.

371. Dat je kružni isječak ASB čiji je poluprečnik 12 cm, a $\sphericalangle ASB=60^{\circ}$. Taj kružni isječak presječen je pravom q paralelno sa tetivom AB i ova prava siječe poluprečnike u tačkama C i D tako da je obim trougla CSD jednak obimu figure koja je omeđena dužima CD, AC, BD i lukom l=AB. Odredi dužinu duži CS.



372. Izračunati površinu osjenčenog dijela kvadrata na slici, stranice a=6 cm.



Republičko takmičenje 2003.

VI razred

373.Od svih brojeva koji pri dijeljenju sa 2, 3, 4, 5 i 6 daju ostatak 1, a koji su djeljivi sa 7 odrediti onaj koji je najbliži broju 2003.

374. Jedna buba ide brzinom od 3 mm za 2 sekunde duž minutne kazaljke sata čija je dužina 36 dm. Za koliki ugao će se obrnuti kazaljka dok buba prijeđe cijelu kazaljku (od centra do vrha)?

375. Dat je jednakostraničan trougao ABC. Na stranici AB odabrane su tačke M i N takve da je AM=MN=NB, a na stranici AC tačka P tako da je CP=AM. Naći zbir uglova $\sphericalangle PMC+\sphericalangle PNC$.

376. Dat je konveksan četverougao $ABCD$. Neka su k_1, k_2, k_3, k_4 krugovi, od kojih svaki dodiruje jednu stranicu i dva produžetka susjednih stranica datog četverougla. Dokazati da centri ovih krugova pripadaju jednom krugu.

377. Dat je niz od 5 cijelih brojeva. Napišu li se svi mogući zbirovi od po dva broja ovog niza, dobiće se niz: 1, 6, 9, 13, 11, 14, 18, 19, 23, 26. Naći ove brojeve.

VII razred

378. Članovi matematičke sekcije u jednoj školi dogovorili su se da za vrijeme njenog raspusta svako od njih napiše po jednu razglednicu ostalim članovima. Koliko je bilo članova sekcije ako je bilo napisano ukupno 702 razglednice?

379. Koliko ima prirodnih brojeva n tako da je broj $2003+n$ djeljiv sa $n+1$?

380. Konstruisani su proizvoljan četverougao $ABCD$ i paralelogram $DBCM$. Dokazati da je površina trougla ACM jednaka površini datog četverougla $ABCD$.

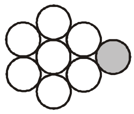
381. Dodirna tačka upisane kružnice u pravougli trougao dijeli hipotenuzu na dijelove čije su dužine 3 cm i 5 cm. Izračunati površinu tog trougla.

382. Dokazati da je za sve realne brojeve x i y vrijednost polinoma $x^2+y^2+xy+x+y+2$ različita od nule.

VIII razred

383. Na slici je nacrtano 8 jednakih krugova, tako da šest neosjenčenih dodiruju sedmi, unutrašnji krug, i svaki dodiruje i dva susjedna kruga. Osjenčeni krug se

bez klizanja kotrlja u jednom smjeru oko neosjenčenih krugova. Koliko obrtaja načini ovaj krug dok neosjenčene krugove obiđe jedanput.



384. Poletjevši istovremeno, helikopter i avion lete u susret jedan drugom. U trenutku susreta helikopter je preletio 100 km manje od aviona i na mjesto polijetanja aviona stigao 3 sata poslije susreta. Avion je stigao na uzletište helikoptera 1 sat i 20 minuta poslije susreta. Izračunati brzinu aviona i helikoptera kao i udaljenost između njihovih uzletišta.

385. Visina jednakokrakog trapeza je h, a njegova površina iznosi h^2. Pod kojim uglom se sijeku dijagonale tog trapeza?

386. U četverouglu $ABCD$ neka su M i N središta suprotnih stranica AB i DC; zatim, neka se duži MD i AN sijeku u tački P, a MC i BN u tački Q. Dokazati da je površina četverougla $MQNP$ jednaka zbiru površina trouglova APD i BCQ.

387. Naći sve prirodne brojeve koji imaju svojstvo da su jednaki aritmetičkoj sredini svih šest brojeva koji se mogu napisati pomoću cifara tog broja.

Opštinsko takmičenje 2004.

VI razred

388. Data je jednakost $\overline{XXX} \cdot Y + Z = 2004$. Dešifrovati ovu jednakost tako što umjesto slova X, Y, Z treba odrediti cifre, pri čemu jednakim slovima odgovaraju jednake cifre, a različitim slovima različite cifre. Koliko ima različitih rješenja?

389. Učenike Prve osnovne škole podijelimo u tri grupe tako da u prvoj grupi bude polovina svih učenika uvećana za 50 učenika, u drugoj grupi polovina preostalih učenika uvećana takođe za 50 učenika i u trećoj grupi preostalih 100 učenika. Koliko ima učenika u toj školi?

390. Odrediti najmanji sedmocifreni prirodan broj djeljiv sa 36 čije su sve cifre različite.

391. Data je prava a i tačke M, N sa iste strane prave a; prava MN nije ni paralelna sa pravom a niti normalna na pravu a. Konstruisati koncentrične kružnice k_1, k_2 tako da kružnica k_1 dodiruje prave a i MN, a kružnica k_2 sadrži tačke M i N.

392. Dvije prave se sijeku u tački A i obrazuju četiri ugla. Zbir unakrsnih oštrih uglova iznosi dvije jedanaestine jednog od unakrsnih tupih uglova. Odrediti mjerne brojeve svakog od ta četiri ugla.

VII razred

393. Neka su α, β i γ uglovi trougla ABC. Izračunati uglove α, β i γ ako je $\alpha=0{,}4\beta$ i $\gamma=4\alpha$.

394. Saša je za istu sumu novca kupio dvije vrste bombona čija je cijena 4 KM i 6 KM po kilogramu. Zatim je bombone pomiješao. Kolika je cijena jednog kilograma tako dobijene mješavine bombona?

395. Konstruisati trougao ABC, ako su dati sljedeći elementi: stranica AB=4 cm, težišna duž BB_1=5 cm i $\measuredangle ABC=\beta=60^{\circ}$.

396. Jedan radnik može da završi neki posao za 10 dana, a drugi radnik taj isti posao može da završi za 15 dana. Ako im se pridruži treći radnik, sva trojica će završiti taj posao za 5 dana. Za koje bi vrijeme treći radnik sam završio taj posao?

397. Zbir 2004 međusobno različitih prostiha brojeva je neparan broj.
a) Da li je proizvod ta 2004 prosta broja paran ili neparan broj?
b) Dokazati da među njima postoje 2003 prosta broja čiji je zbir paran broj.
c) Dokazati da među njima postoje 2003 broja čiji je zbir neparan broj.

VIII razred

398. Ako su kraci nejednakokrakog trapeza međusobno normalni, onda je zbir kvadrata njegovih osnovica jednak zbiru kvadrata njegovih dijagonala. Dokazati.

399. Izračunati površinu pravilnog dvanaestougla, ako je poluprečnik kruga opisanog oko dvanaestougla jednak 6 cm.

400. Ako je $x^2+y^2+2x+6y+10=0$, odrediti vrijednost polinoma
$$P(x,y)=x^{2004}+2003y.$$

401. Dijagonale AC i BD paralelograma $ABCD$ sa oštrim uglom kod tjemena A, sijeku se u tački O. Tačka M je na pravoj AB, pri čemu je $\measuredangle AMO=\measuredangle MAD$. Dokazati da je tačka M jednako udaljena od tačaka C i D.

402. Dokazati da među 26 različitih neparnih brojeva manjih od 100 postoje bar dva čiji je zbir jednak 100.

IX razred

403. Kazaljke časovnika pokazuju 9 časova. Kada će se mala i velika kazaljka prvi put poklopiti poslije tog trenutka?

404. U koordinatnoj ravni xOy date su tačke $O(0,0)$, $M(3,4)$ i $N(x,0)$. Odrediti jednačine pravih OM i MN, ako je površina trougla OMN jednaka 14.

405. Izračunati površinu i zapreminu pravilne četverostrane piramide čija je visina 17 cm, a površina dijagonalnog presjeka 204 cm^2.

406. Ako je $x>1$ i $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$, izračunati $x+\frac{3}{4}$, $x-\frac{1}{x}$ i x.

407. Dat je konveksan četverougao $ABCD$ površine P. Dokazati da je
$$AB\cdot BC+CD\cdot DA\geq 2P.$$

Regionalno takmičenje 2004.

VI razred

408. Odrediti najmanji četverocifreni broj koji je djeljiv sa 9 i čiji je proizvod cifara 180.

409. Ako se ivica kocke poveća za 2 cm, površina kocke se poveća za 96 cm^2. Kolika je zapremina kocke?

410. U vreći se nalazi šećer u prahu. Raspolažemo sa dva tasa i jednim tegom od 1 grama. Kako ćemo sa deset mjerenja izmjeriti jedan kilogram šećera?

411. Simetrale susjednih uglova α i β su normalne jedna na drugu. Izračunati uglove α i β ako je $\alpha - \beta = 30^{O}10'20''$.

412. Dat je kvadrat $ABCD$ stranice a=7 cm. Konstruisati tačku M koja je jednako udaljena od tačaka A i B, a od tačke D udaljena 5 cm.

VII razred

413. Razlika između $\frac{7}{9}$ jednog broja i $\frac{7}{9}$ drugog broja je $\frac{3}{7}$. Koliko iznosi razlika $\frac{3}{4}$ prvog broja i $\frac{3}{4}$ drugog broja?

414. Izračunati: a) $1-2+3-4-...+2001-2002+2003-2004$;
b) $1-3+5-7+9-...+1997-1999+2001-2003$.

415. Odrediti cijele vrijednosti promjenljive x za koje je $\frac{1}{x} > x$.

416. Dat je niz od 5 cijelih brojeva. Napišu li se svi mogući zbirovi od po dva broja ovog niza dobije se niz: 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15. Odrediti brojeve tog niza.

417. Date su tačke A i B i prava s u ravni α. Konstruisati pravu a, koja sadrži tačku A, i pravu b koja sadrži tačku B, tako da prava s polovi jedan od uglova koga određuju prave a i b.

VIII razred

418. Izračunati: a) $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{3-2\sqrt{2}}$; b) $\sqrt{32+10\sqrt{7}}-\sqrt{32-10\sqrt{7}}$.

419. Među matematičarima ima 7% filozofa, a među filozofima 10% matematičara. Ima li više matematičara ili filozofa? Odgovor obrazložiti.

420. U jednostraničnom trouglu stranice a=6 cm upisana je kružnica k_1. Jedno tjeme trougla je centar kružnice k_2 poluprečnika $\frac{a}{2}$. Izračunati površinu figure između kružnica k_1 i k_2.

421. Dužine krakova trapeza su 39 mm i 45 mm, a dužina dijagonale, koja je normalna na duži krak, je 60 mm. Izračunati obim i površinu trapeza.

422. Zbir dvocifrenog broja i broja koji je zapisan istim ciframa ali u obrnutom poretku je kvadrat prirodnog broja. Odrediti sve takve brojeve.

IX razred

423. Može li se posudama od 5 i 7 litara napuniti vodom bure zapremine 2004 litre? (Uzimamo da su posude uvijek pune.)

424. Površina pravilne četverostrane piramide je $5a^2$, gdje je a dužina osnovne ivice piramide. Izraziti zapreminu piramide u funkciji od a.

425. U četverouglu $ABCD$ neka su, redom, M, N središta suprotnih stranica AB, DC; zatim, neka se duži MD i AN sijeku u tački P, a duži MC i BN u tački Q. Dokazati da je površina četverougla $MQNP$ jednaka zbiru površina trouglova APD i BCQ.

426. Odrediti brojeve x, y i z za koje je $4x^2+9y^2+16z^2-4x-6y-8z+3=0$.

427. Neka se 10 klikera nalazi na kvadratu stranice $a=3\ m$. Dokazati da su bar dva klikera međusobno udaljena manje od $\sqrt{2}\ m$.

Republičko takmičenje 2004.

VII razred

428. Odrediti najmanji prirodan broj kojim treba pomnožiti broj 90 522 da se dobije kvadrat jednog prirodnog broja. Kojeg broja?

429. Poslije sniženja cijene za 20% za iznos od 240 KM se može kupiti 1 metar štofa više nego što se prije sniženja moglo kupiti za 270 KM. Kolika je bila cijena štofa prije sniženja?

430. U jednakokrakom trapezu srednja linija je s, a dijagonala d je dva puta veća od srednje linije. Kolika je površina trapeza?

431. Dat je krug poluprečnika 3 cm i dvije proizvoljne tačke M i N u ravni kruga. Dokazati da postoji tačka P na kružnici takva da je $MP+NP>6$.

432. Dato je proizvoljnih prostih brojeva. Dokazati da se bar 2 004 datih prostih brojeva završava istom cifrom.

VIII razred

433. Jedan radnik može da završi neki posao za10 dana, a drugi radnik taj isti posao može da završi za 15 dana. Ako im se pridruži treći radnik, završiće isti posao za 5 dana. Za koje bi vrijeme treći radnik sam završio taj posao?

434. Nad datom duži $AB=a$ kao prečnikom, opisan je polukrug sa centrom O i unutar tog polukruga upisana su nad OA i OB kao nad prečnicima još dva manja polukruga. Izračunati poluprečnik kruga koji dodiruje veći polukrug iznutra, a manje polukrugove spolja.

435. Na koliko načina se 1224 kg šećera može pakovati u vreće od 27 kg i 72 kg, a da pri tome upotrijebimo više vreća od 27 kg?

436. Duž AC dužine a je svojom unutrašnjom tačkom B podijeljena u odnosu 3:2. Nad dužima AB i BC sa raznih strana u odnosu na AC konstruisani su kvadrati

$ABDE$ i $BCFG$. Neka su M i N preseci dijagonala dobijenih kvadrata. Izračunati površinu četverougla $MNCD$ u funkciji od date duži a.

437. Zbir šest uzastopnih prirodnih brojeva, od kojih nijedan nije djeljiv sa 7, djeljiv je sa 21, a nije djeljiv sa 42. Dokazati! Odrediti šest takvih brojeva tako da njihov zbir bude četverocifren broj i da predstavlja kvadrat nekog prirodnog broja.

IX razred

438. Elementi tročlanog skupa $A = \{a, b, c\}$ su stepeni prostih dvocifrenih brojeva manjih od. 20. Dokazati da među elementima skupa A postoje dva broja, kojima je zbir ili razlika djeljiva sa 5.

439. Posmatrač vidi duž AB iz dvije tačke C i D, pod uglom od 30° pri čemu je udaljenost od C do D 300 m. Tačke A, B, C i D leže u jednoj ravni, a C i D su sa iste strane prave AB. Prave AD i BC su međusobno normalne. Izračunati dužinu duži AB.

440. Osnovne ivice kvadra odnose se kao 4 : 3, dijagonale bočnih strana odnose se međusobno kao $\sqrt{20} : \sqrt{13}$, a površina dijagonalnog presjeka odnosi se prema zapremini kvadra kao 2 : 1 . Izračunati površinu i zapreminu ovog kvadra.

441. Kojom cifrom se završava broj $1^{2004}+2^{2004}+3^{2004}+4^{2004}+\quad+2004^{2004}$?

442. Prirodni broj n je takav da su brojevi $2n+1$ i $3n+1$ kvadrati prirodnih brojeva. Dokazati da je broj $5n+3$ složen.

Opštinsko takmičenje 2005.

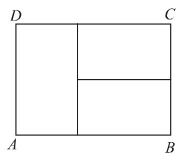
VI razred

443. Magični kvadrat 3x3 popuniti brojevima skupa $A=\{3, 7, 11, 15, 19, 23, 27, 31, 35\}$ tako da u svakom redu, svakoj koloni i na obje dijagonale zbir bude jednak.

444. Jedan zemljoradnik okopa dvije trećine svog vinograda za 5 sati i 20 minuta. Za koje vrijeme bi on okopao pet osmina vinograda?

445. Ako je p prost broj, dokazati da je $p^{11}+2005$ složen broj.

446. Pravougaonik $ABCD$, na slici, sastoji se od 3 podudarna pravougaonika. Ako je obim svakog dijela 60 cm, kolika je površina kvadrata čiji je obim jednak obimu pravougaonika $ABCD$?



447. Nastavnik je dijelio učenike u grupe. Ako bi svaka grupa imala po šest učenika, onda bi dva učenika ostala neraspoređena. Ako bi u grupama bilo po 7 učenika, onda, da bi dobili jednak broj grupa kao u prvom slučaju, a u jednoj grupi nedostaje 3 učenika. Koliko je bilo grupa, a koliko učenika?

VII razred

448. Tri osobe podijele neku sumu novca tako da jedna osoba dobije $\frac{2}{3}$, druga $\frac{3}{8}$ te sume, a treća ostatak. Odrediti sumu novca koju su dijelile te tri osobe ako je prva dobila 85 KM više od treće osobe?

449. U jednakokrakom trouglu ABC (AC=BC) simetrala ugla BAC i visina AD koja odgovara kraku sijeku se pod uglom od 15° . Odrediti uglove trougla ABC.

450. Prema statističkim podacima u 2435 mjesnih zajednica na teritoriji Republike Srpske živi 1083764 stanovnika. Dokazati da postoje bar dvije mjesne zajednice sa istim brojem stanovnika.

451. Cijena neke robe povećana je za 25%. Za koliko procenata treba smanjiti novu cijenu da bi ona bila jednaka početnoj cijeni?

452. U spoljašnjoj oblasti pravougaonika $ABCD$ konstruisani su jednakostranični trouglovi BCE i CDF. Dokazati da je trougao AEF jednakostraničan.

VIII razred

453. Broj dijagonala mnogougla je petnaest puta veći od broja stranica. Odrediti zbir unutrašnjih uglova tog mnogougla?

454. Odredi vrijednost izraza $P(x,y) = x^{2005} + 2005y$ ako je $x^2+y^2+2x-6y+10=0$.

455. Količnik dužina kateta pravouglog trougla iznosi 1,05, a razlika poluprečnika opisane i upisane kružnice ovog trougla je 17 cm. Izračunati površinu tog trougla.

456. Izračunati $x+y+z$ ako su x, y, z rješenja jednačina:

$$\sqrt{3(x-2005)} = 3;\ \sqrt{3y-2004} = 3;\ \sqrt{3(z-2006)} = 3.$$

457. Odrediti uređene parove (x, y) prirodnih brojeva tako da važi $x + \frac{4}{y} = 2000$.

IX razred

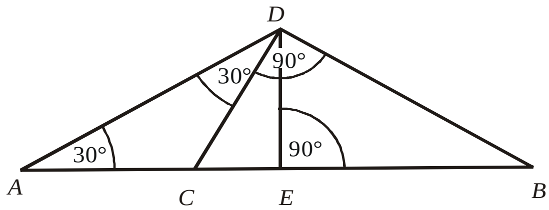
458. Osnovica BC jednakokrakog trougla ABC leži u ravni α. Udaljenost tjemena A od ravni α je 4 cm. Izračunati ugao diedra koji ravan trougla ABC određuje sa ravni α, ako je osnovica BC trougla ABC 12 cm, a krak 10 cm.

459. U koordinatnoj ravni xOy date su tačke $O(0,0)$; $M(3,4)$ i $N(x,0)$. Odrediti jednačine pravih OM i MN, ako je površina trougla OMN jednaka 14.

460. Dokazati da za pozitivne realne brojeve x, y, z važi

$$xy(x+y-2z)+yz(y+z-2x)+xz(x+z-2y) \geq 0.$$

461. Prema podacima na slici odrediti razmjer $AB : AC : CE : BE$.



462. Odrediti poslednje dvije cifre broja 99^{12345}.

Regionalno takmičenje 2005.

VI razred

463. Zbir *umanjenika, umanjioca* i *razlike* dva broja je 10000, a *razlika* je tri puta veća od *umanjioca*. Odrediti brojeve koji zadovoljavaju navedena svojstva.

464. Odrediti pet prirodnih brojeva čiji je proizvod 420, a zbir 20.

465. Koliko se petocifrenih brojeva može napisati od cifara 1, 2, 3, 4, 5 tako da se svaka cifra upotrebi tačno jedanput, ali da cifre 1, 2, 3 budu jedna do druge:
a) u rastućem poretku; b) u bilo kom poretku?

466. Ako se stranica kvadrata poveća za 5 cm, površina se poveća za 155 cm^2. Kolika je bila stranica kvadrata?

467. Ploču dužine 363 cm i širine 231 cm želimo izrezati na što veći broj jednakih pločica kvadratnog oblika.

a) Kolika je dužina stranice tako dobijenog kvadrata?
b) Na koliko podudarnih kvadrata treba razrezati datu ploču?

VII razred

468. Izračunati $a+b+c+d$ ako je $a+1=b+2=c+3=d+4=a+b+c+d+5$.

469. Koliko ima petocifrenih brojeva manjih od 50000 koji su djeljivi sa 5:

a) ako su sve cifre različite;
b) ako se cifre mogu ponavljati?

470. Ako nekom broju dopišemo zdesna cifru 9, dobijeni broj podijelimo sa 13, zatim dobijenom količniku dopišemo zdesna 1 i dobijeni broj podijelimo sa 11, dobije se broj 21. Odrediti taj broj.

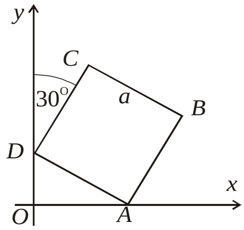
471. Ako su a, b, c cijeli brojevi različiti od nule, izračunati vrijednost izraza

$$\frac{a}{|a|}+\frac{b}{|b|}+\frac{c}{|c|}+\frac{abc}{|abc|}?$$

472. Dat je kvadrat $ABCD$. Nad stranicom AB sa unutrašnje strane konstruisan je jednakostranični trougao ABE, a nad stranicom BC sa spoljašnje strane konstruisan je jednakostraničan trougao CBF. Dokazati da su tačke D, E, F kolinearne.

VIII razred

473. U koordinatnoj ravni nacrtan je kvadrat $ABCD$, slika. Odrediti koordinate tjemena A, B, C, D.



474. Seljak treba da preore njivu. Planira početi rano ujutro i završiti do 10 časova prije podne tako da svakog časa preore 10 ari. Kad je završio polovinu posla desi se kvar na traktoru i kod daljeg oranja može preorati samo 5 ari na čas. Oranje (cijele njive) je završio u 12 časova. Kolika je površina njive i u koliko časova je seljak počeo orati?

475. Za realne brojeve a, b, c važi $a^2+2b=7$, $b^2+4c=-7$ i $c^2+6a=-14$. Izračunati $a^2+b^2+c^2$.

476. U trouglu ABC, sa stranicama $AB=32\ cm$, $BC=24\ cm$, težišne duži AM i CN se sijeku pod pravim uglom. Izračunati dužinu stranice AC.

477. U kružnicu polumjera $r=\sqrt{3}\ cm$ konstruisane su sa iste strane centra kružnice dvije paralelne tetive. Dužina jedne tetive jednaka je dužini stranice upisanog pravilnog šestougla, a druge dužini stranice upisanog jednakostraničnog trougla. Izračunati površinu ograničenu tim tetivama i datom kružnicom.

IX razred

478. Riješiti nejednačinu $|x|<\sqrt{x^2-2x+1}$.

479. Izračunati vrijednost izraza $\frac{x}{y}$ ako je $2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}\right)=\frac{9}{x+y}$, gdje je $x\neq 0$, $y\neq 0$, $x+y\neq 0$.

480. Grafici linearnih funkcija $y=-7x+31$, $y=3x-19$, $y=-5x+37$, $y=2x-5$ su redom prave a, b, c, d. Prave a i b sijeku se u tački A, prave b i c u tački B, prave c i d u tački S, a prave d i a u tački D.
a) Grafički predstaviti date funkcije u Dekartovom koordinatnom sistemu.
b) Odrediti koordinate tačaka A, B, C, D.
c) Izračunati površinu četverougla $ABCD$.

481. Visina pravilne četverostrane piramide je $H=\sqrt{2}\ cm$. Na kom rastojanju od vrha te piramide treba postaviti ravan paralelnu sa osnovom piramide koja dijeli omotač piramide na dva dijela jednakih površina.

482. Dat je pravougli trougao ABC hipotenuze AB. Neka su K, L, M, N tačke sa one strane prave AB sa koje je i tačka C, takve da su $BCKL$ i $CAMN$ kvadrati. Ako su L_1 i M_1 podnožja normala iz L i M na pravu AB, dokazati da je LL_1+MM_1=AB.

Republičko takmičenje 2005.

VII razred

483. Na ploči je napisano deset uzastopnih prirodnih brojeva. Ako jednog od njih obrišemo, tada je zbir preostalih devet brojeva 2005. Odrediti koji smo broj obrisali.

484. Koliko ima petocifrenih brojeva čiji je proizvod cifara 210.

485. Odrediti najmanji pozitivan racionalan broj koji je djeljiv razlomcima $\frac{8}{15}$ i $\frac{12}{35}$; količnik je cijeli broj.

486. U pravougaoniku $ABCD$ tačke P, Q, R, S su, redom, središta stranica AB, BC, CD, AD. Tačka T je središte duži RS. Izračunati površinu troougla QRT ako je površina pravougaonika $ABCD$ 888 cm^2.

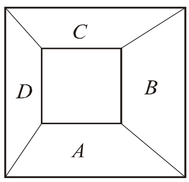
487. U pravouglom trouglu ABC duž CD je hipotenuzina visina. Ako su M i N središta kateta, dokazati da je ugao MDN prav.

VIII razred

488. Zbir n realnih brojeva je 40. Ako svaki broj h tog niza zamijenimo brojem $1-h$, tada je zbir ovih novih brojeva 20. Odrediti zbir brojeva koji se dobiju tako što svaki broj h datog niza zamijenima sa $1+h$.

489. U skupu cijelih brojeva odrediti rješenja jednačine $(x+2004)^{100}=x^{100}$.

490. Jedan kvadrat je smješten u unutrašnjost drugog kvadrata tako da su im stranice paralelne kao što je prikazano na slici. Dokazati da je zbir površina figura A i C jednak zbiru površina figura B i D.



491. Dat je četverougao $ABCD$. Izračunati dužinu stranice AB ako je BC=1 cm, CD=2 cm, $AD=\sqrt{3}\ cm$, $\measuredangle BCD=120^{\circ}$ i $\measuredangle CDA=90^{\circ}$.

492. Dužine visina trougla ABC su 12 cm, 15 cm i 20 cm. Dokazati da je trougao ABC pravougli.

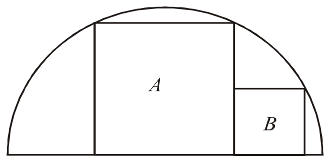
IX razred

493. Za realne brojeve a, b, c važi $a+b+c=26$ i $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=28$. Izračunati vrijednost izraza $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}$.

494. Na Republičkom takmičenju iz matematike održanom 7. maja 2005. godine Milan je rekao: „Razlika između broja mjeseci i punih godina moje starosti je 111". Kojeg datuma je Milan rođen?

495. Neka su x i y pozitivni realni brojevi i $y>1$ tako da važi $x+y^2=xy$. Odrediti najmanju moguću vrijednost od x.

496. Dva kvadrata, površina A i B, su upisana u polukrug kao što je prikazano na slici. Izračunati količnik $\frac{A}{B}$.



497. Visine bočnih strana trostrane piramide su jednake. Pod kojim uglom su nagnute njene bočne strane prema ravni osnove, ako je površina piramide 1,5 puta veća od površine njenog omotača.

Opštinsko takmičenje 2006.

VI razred

498. Četiri tetive dijele krug na najveći broj dijelova. Na koliko dijelova je podijeljen krug?

499. Dvije prave se sijeku u tački S i obrazuju četiri ugla. Zbir unakrsnih oštrih uglova iznosi dvije jedanaestine jednog od unakrsnih tupih uglova. Odrediti mjerne brojeve svakog od ta četiri ugla.

500. Da li postoji prirodan broj n za koji se vrijednost izraza 3^n+2 može predstaviti u obliku proizvoda dva uzastopna prirodna broja? Odgovor obrazložiti.

501. Ako se sva polja šahovske table (8x8 kvadrata) poredaju jedno pored drugog dobije se pravougaonik obima 390 cm. Izračunati površinu šahovske table.

502. Za pakovanje 163 litra soka upotrebljeno je 209 boca zapremine $\frac{4}{5}$ litra i $\frac{3}{4}$ litra. Ukupna zapremina 209 boca je 163 litra. Koliko ima boca od $\frac{3}{4}$ litra?

VII razred

503. U zapisu $*1*2*4*8*16*32*64=27$ umjesto znaka $*$ staviti jedan od znakova (simbola) računskih operacija sabiranja ili oduzimanja tako da dati zapis bude tačna jednakost.

504. Unutrašnji ugao α pravouglog trougla ABC sa uglom od 90° kod tjemena C iznosi $\frac{4}{11}$ susjednog spoljašnjeg ugla. Izračunati ugao φ koji grade simetrale pravog ugla i spoljašnjeg ugla β_1 kod tjemena C.

505. Odrediti broj koji ima tačno osam djelioca među kojima su brojevi 15 i 21.

506. Mjerni brojevi stranica trougla su prirodni brojevi. Ako su dužine dvije stranice trougla 15 cm i 4 cm, odrediti dužinu treće stranice.

507. U prizemlju zgrade se nalazi lift, koji ne može podići više od 150 kg. Četiri prijatelja teže: 60 kg, 80 kg, 80 kg, 80 kg. Koliko najmanje puta mora lift preći put između prizemlja i posljednjeg sprata da bi odveo sva četiri prijatelja iz prizemlja na posljednji sprat?

VIII razred

508. Dat je razlomak $\dfrac{K\cdot O\cdot C\cdot K\cdot A}{M\cdot A\cdot T\cdot E\cdot M\cdot A\cdot T\cdot I\cdot S\cdot K\cdot O\cdot P}$.

a) Izračunati vrijednost razlomka ako jednakim slovima odgovaraju jednake cifre, a različitim slovima različite cifre.
b) Koje slovo odgovara cifri 0?

509. Neka su t_a, t_b i t_c težišne duži pravouglog trougla ABC, gdje je t_c težišna duž hipotenuze. Dokazati da važi $t_a^2+t_b^2=t_c^2$.

510. Kružnica dijeli svaku stranicu kvadrata na tri jednaka dijela. Izračunati stranicu kvadrata i obim mnogougla određenog presječnim tačkama, ako je poluprečnik kružnice $2\sqrt{10}$ cm.

511. Izračunati površinu trapeza čije su osnovice a=25 cm, b=15 cm i kraci c=6 cm i d=8 cm.

512. Ako je $\frac{1}{1+\frac{1}{5}}=\frac{a}{b}$, gdje su a i b relativno prosti brojevi, izračunati a^2+b^2.

IX razred

513. Kroz tačku P koja je u unutrašnjosti pravog ugla i na jednakom rastojanju od krakova tog ugla $1\frac{5}{7}cm$, treba nacrtati pravu koja s tim kracima gradi pravougli trougao površine 6 cm^2. Kolike su dužine stranica tog trougla, ako je jedna kateta za 1 cm duža od druge katete?

514. Ako u nekom mjesecu tri utorka padaju u parne datume, kog datuma pada posljednji petak u tom mjesecu?

515. Odrediti minimalnu vrijednost polinoma $4x^2+9y^2-12x+30y+2006$.

516. Ako je $a(b+c)=bc\left(\frac{a}{2006}-1\right)$, gdje su a, b, c realni pozitivni brojevi, izračunati $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$.

517. Osnovne ivice kvadra odnose se kao 4 : 3, dijagonale bočnih strana odnose se kao $\sqrt{20}:\sqrt{13}$, a površina dijagonalnog presjeka odnosi se prema zapremini kvadra kao 2 : 1 . Izračunati zapreminu kvadra.

Regionalno takmičenje 2006.

VI razred

518. Brojevi 112, 121, 123, 153, 243, 313 i 322 su raspoređeni u redove, kolone i dijagonale magičnog kvadrata 3x3 tako da su cifre tih brojeva upisane u manje kvadrate. (Brojevi upisani u redove i dijagonale čitaju se slijeva na desno, a brojevi upisani u kolone odozgo prema dole.) Odrediti osmi trocifreni broj koji upotpunjuje niz datih brojeva.

519. Neka su $a-b+2006$, $b-c+2006$, $c-a+2006$, tri uzastopna cijela broja. Odrediti te brojeve.

520. Dokazati da je zbir $1+2+3+\quad+2005$ djeljiv sa 2005.

521. Ugao koji zatvaraju velika i mala kazaljka časovnika jednak je uglu koji su one zatvarale prije pola sata. Odrediti sve moguće mjere tog ugla.

522. Kocka K je sastavljena od 27 jednakih manjih kocki. Ako od kocke K oduzmemo one manje kocke koje sadrže njena tjemena dobićemo tijelo T. Uporediti površine kocke K i tijela T.

VII razred

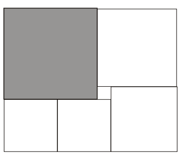
523. Odrediti vrijednost proizvoda

$$\left(1+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{9}\right)\cdot\dots\cdot\left(1+\frac{2}{99}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{101}\right)$$

524. Dokazati da je $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{100}>\frac{1}{5}$.

525. Za prirodne brojeve a i b važi $19a=97b$. Dokazati da je $a+b$ djeljiv sa 116.

526. Pravougaonik je sastavljen od šest kvadrata (slika). Odrediti dužinu stranice najvećeg (šrafiranog) kvadrata ako je stranica najmanjeg kvadrata jednaka 1 cm.



527. Za težišnu duž AA_1 i stranicu BC trougla ABC važi $AA_1 : BC=3 : 2$. Odrediti veličinu ugla između druge dvije težišne duži.

VIII razred

528. Odrediti sve cijele brojeve x za koje je $|x^2-2x-3|$ prost broj.

529. Izračunati vrijednost izraza $a^6+3a^2b^2+b^6$, ako je $a^2+b^2=1$.

530. Neka je $ABCDE$ pravilni petougao. Konstruisan je jednakostranični trougao ABT, gdje se tjeme T nalazi u unutrašnjosti petougla. Izračunati mjeru ugla TCE.

531. Deset tačaka A_1, A_2, A_3,…A_{10} dijeli kružnicu poluprečnika 1 cm na deset jednakih kružnih lukova. Izračunati $A_1A_4-A_1A_2$

532. Neka je $t=3^{2004}$. Ako je $3^{2004}+3^{2005}+3^{2006}=\alpha\cdot t$, odrediti α.

IX razred

533. Kvadrat cijelog broja pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1. Dokazati.

534. Pozitivni realni brojevi a i b zadovoljavaju nejednakost $\frac{1-ab}{a+b}<1$. Dokazati da je jedan od tih brojeva veći od 1, a drugi manji od 1.

535. Za realne brojeve x, y, z važi $xyz=1$. Ako je $a=x+\frac{1}{x}$, $b=y+\frac{1}{y}$, $c=z+\frac{1}{z}$, izračunati $a^2+b^2+c^2-abc$.

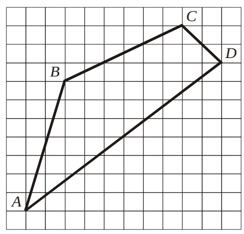
536. Izračunati površinu kruga upisanog u trougao koji prava $y=-\frac{1}{2}x+2$ obrazuje sa koordinatnim osama.

537. Izračunati $S=2+2^2+2^3+2^4+...+2^{100}$.

Republičko takmičenje 2006.

VII razred

538. Odrediti površinu figure $ABCD$ ako je dužina jediničnog kvadrata 1 cm.



539. Sala za prijeme ima kapacitet 400 osoba (uključujući i konobare). Ako je jedan konobar potreban za 12 gostiju koji je najveći mogući broj gostiju?

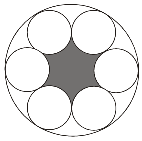
540. U kutiji se nalazi 15 crvenih, 12 plavih i 7 zelenih klikera. Koliko klikera treba odjednom izvući, bez gledanja, da ismo bili sigurni da smo uzeli najmanje dva klikera: a) raznih boja; b) plave boje?

541. Razlika dva dvocifrena prosta broja, koji su zapisani istim ciframa, ali u obrnutom redosljedu, je kvadrat prirodnog broja. O kojim prostim brojevima se radi?

542. U trouglu ABC konstruisana je simetrala AK unutrašnjeg ugla kod tjemena A, gdje tačka K pripada stranici BC. Poznato je da se centar kruga opisanog trouglu ABC i centar kruga upisanog trouglu AKC nalaze u jednoj tački. Odrediti uglove trougla ABC.

VIII razred

543. Svaki od šest krugova poluprečnika 1 cm dodiruje svoja dva susjedna kruga, a svih šest dodiruju iznutra veliki sedmi krug kao što je prikazano na slici. Izračunaj površinu šrafiranog dijela.



544. Dokazati da je broj $1998 \cdot 2000 \cdot 2002 \cdot 2004 + 16$ kvadrat prirodnog broja.

545. Odrediti mjeru unutrašnjih uglova trougla ABC ako su centar upisane i centar opisane kružnice simetrični u odnosu na jednu stranicu trougla.

546. Odredit vrijednost izraza $a(a+2)+c(c-2)-2ac+1$, ako je $a-c=99$.

547. U pravouglom koordinatnom sistemu Oxy date su tačke $A(-1,2)$, $B(3,5)$ i $C(7,5)$. a) Odrediti koordinate tačaka koje imaju osobinu da svaka sa tačkama A, B i C obrazuje paralelogram. b) Izračunati površine tako dobijenih paralelograma.

IX razred

548. Aka je $x > 1$ i $x^2 + \frac{1}{x^2} = \frac{17}{4}$, izračunaj $x + \frac{1}{x}$, $x - \frac{1}{x}$ i x.

549. a) Rastaviti na činioce izraz n^5+n+1. b) Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je broj n^5+n+1 prost broj.

550. Igrajući šah sa kompjuterom, Milan je dobio 60% partija. Odmorivši se, odigrao je još 10 partija i procenat dobijenih partija je iznosio 70%. Koliko Milan treba odigrati još partija i koliko ih dobiti da bi procenat dobijenih partija opet iznosio 60%.

551. Neki prirodan broje je manji od 328 za onoliko koliko iznosi zbir njegovih cifara. Koji je to broj?

552. Kvadrat $ABCD$ je osnova piramide $ABCDS$. Njene bočne strane su jednakostranični trouglovi. Izračunati veličinu ugla SAC .

Opštinsko takmičenje 2007.

VI razred

553. Skratiti razlomke: a) $\frac{123\,123}{123\,123'}$; b) $\frac{121\,121\,121}{121\,121\,121}$.

554. Dato je 999 kocki ivice 1 cm. Slaganjem ovih kocki, jednu do druge, treba načiniti najveću moguću kocku. Od preostalih kockica, treba ponovo načiniti naj-

veću moguću kocku, na isti način. Ovaj postupak ponavljamo sa preostalim kockama dok ih sve ne upotrebimo na navedeni način. Izračunati:

a) koliko se na taj način dobije kocki od 999 malih kocki;

b) zbir površina svih tako dobijenih kocki.

555. Jedna duž je duža od druge za 90 cm. Da su obe duži kraće za po 20 cm, tada bi jedna duž bila četiri puta kraća od druge. Odrediti dužine tih duži.

556. Danas je subota. Koji dan u sedmici će biti hiljaditi dan ako sutrašnji dan računamo kao prvi? Odgovor obrazložiti!

557. Zapremina kocke i lopte je $12\frac{4}{15}\ cm^3$. Zapremina tri kocke i dvije lopte je $35\frac{1}{4}\ cm^3$. Kolika je zapremina jedne kocke?

VII razred

558. Izračunaj brojevnu vrijednost izraza $\frac{4}{101\cdot105}+\frac{4}{105\cdot109}+\frac{4}{109\cdot113}+\frac{4}{113\cdot117}$.

559. Zbir jedanaest uzastopnih prirodnih brojeva je 5555. Odrediti najmanjih od tih brojeva!

560. Poslije nekoliko kišnih dana vodostaj rijeke Vrbas se povećao za 25%. Sutra-dan se smanjio za 10% da bi se trećeg dan povećao za 10%, a četvrtog smanjio za 20%. Da li je četvrtog dana vodostaj Vrbasa bio veći ili manji nego na početku? Koliko ta promjena vodostaja iznosi u procentima?

561. Središta upisane i opisane kružnice trouglu ABC simetrična su u odnosu na stranicu AB. Odrediti uglove trougla.

562. Riješiti jednačinu $0{,}4\cdot\left(\frac{x}{3}-2\right)+\frac{4}{5}=-1\frac{1}{4}\cdot 0{,}2$.

VIII razred

563. Ako su a i b cijeli brojevi za koje važi $a+\sqrt{b}=\sqrt{15+\sqrt{216}}$ izračunaj $\frac{a}{b}$.

564. Dokazati da je broj $17^{12}-1$ djeljiv sa 10.

565. Za koji realan broj a izraz $a^2-4a+2007$ ima najmanju vrijednost?

566. Broj **1 000 002 000 001** rastavi na proste čince ako se zna da je jedan njegov prost činilac veći od **9 000**.

567. Ako je $x^2+x-1=0$, koliko je $x^4+2x^3+x^2$?

IX razred

568. Proizvod realnih brojeva a i b je 1 i važi $\frac{a+b+2}{4}=\frac{1}{a+1}+\frac{1}{b+1}$. Izračunati a^2+b^2.

569. Odrediti sve prirodne brojeve x za koje važi jednakost $n(x-n)=2x+5$, gdje je i n prirodan broj.

570. Date su funkcije $f(x)=|x|-3$ i $g(x)=-|x|+3$.

a) Nacrtati u pravouglom koordinatnom sistemu grafove ovih funkcija.
b) Odrediti površinu lika omeđenog graficima funkcija.

571. Aritmetička sredina šest uzastopnih cijelih brojeva je 18,5. Kolika je aritmetička sredina prvih pet od tih šest brojeva?

572. Dužina kateta pravouglog trougla ABC su 4 cm i 7 cm. Na hipotenuzi AB data je tačka D. Tačke P i Q su težišta trougla ADC, odnosno trougla CDB. Izračunati površinu trougla CMN.

Regionalno takmičenje 2007.

VI razred

573. Uglovi α i β su suplementni uglovi, a uglovi β i γ komplementni. Izračunati uglove α, β i γ ako je zbir uglova α i γ jednak 124^{O}.

574. Tri odjeljenja šestog razreda zajednički su skupili 289 staklenih boca. Da je prvo odjeljenje skupilo još 17, drugo 23, a treće 19 boca imali bi jednak broj boca. Koliko je svako odjeljenje skupilo boca.

575. Sonja treba da pročita knjigu za lektiru. Prvog dana je pročitala jednu trećinu stranica, drugog dana dvije petine, a trećeg dana jednu petinu. Za četvrti dan joj je ostalo još 17 stranica. Koliko knjiga ima stranica?

576. Dejan popije bočicu sirupa za 14 dana. Ako ga pije zajedno sa sestrom Vesnom, popiće ga za 10 dana. Za koliko dana bi Vesna sama popila tu bočicu sirupa?

577. Izračunati razliku zbira svih parnih i zbira svih neparnih prirodnih brojeva manjih od 2007.

VII razred

578. Odrediti sve cijele brojeve n tako da važe nejednakosti $\frac{4}{5} < \frac{1-n}{15} < 1$.

579. Odrediti trocifreni broj $\overline{abc}$ ako je $49a + 7b + c = 286$.

580. Izračunati razliku zbira svih neparnih i zbira svih parnih prirodnih brojeva manjih od 2007.

581. Konstruisati trougao ABC ako je α=30^{O}, h_c=3 cm i težišna duž t_b= 3,5 cm.

582. Zbir šest uzastopnih prirodnih brojeva od kojih nijedan nije djeljiv sa 7, djeljiv je sa 21, a nije djeljiv sa 42. Dokazati.

VIII razred

583. Zbir kvadrata četiri uzastopna prirodna broja je 5334. Odrediti najmanji broj među njima.

584. Kružnica je upisana u kvadrat $ABCD$. Tri tjemena kvadrata $BEFG$ pripadaju stranicama kvadrata $ABCD$, a četvrti datoj kružnici. Izračunati površinu kvadrata $ABCD$, ako je dužina stranice manjeg kvadrata 1 cm.

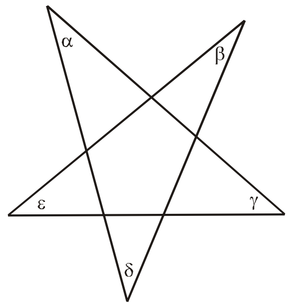
585. Ako je:

$a = \frac{1^2}{1} + \frac{2^2}{3} + \frac{3^2}{5} + \frac{4^2}{7} + \cdots + \frac{1001^2}{2001}$ i $b = \frac{1^2}{3} + \frac{2^2}{5} + \frac{3^2}{7} + \frac{4^2}{9} + \cdots + \frac{1001^2}{2003}$,

izračunati $a - b$.

586. Dat je polinom $P(x)=x^{101}(x-1)^{101}$. Izračunati P(9)–P(3)·P(4).

587. Koristeći podatke sa slike izačunati zbir uglova $S=\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon$.

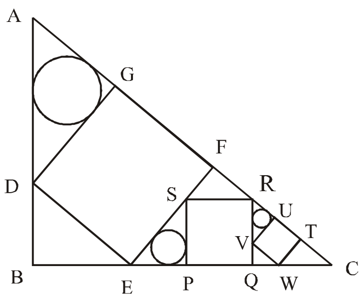


IX razred

588. Palindrom je pozitivan cijeli broj čije su cifre simetrične i čija cifra jedinica nije 0. (Na primjer, palindromi su brojevi 2, 5, 33, 6886, 1230321). Koliko ima: a) trocifrenih; b) četverocifrenih palindroma?

589. Ako je $n!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot(n-1)\cdot n$ (na primjer, $5!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot5=120$). Odrediti n ako je $n!=2^{15}\cdot3^6\cdot5^3\cdot7^2\cdot11\cdot13$.

590. Tri kvadrata i tri kruga upisana su u pravougli trougao ABC na način kako je to prikazano na slici. Ako najmanji i najveći krug imaju redom poluprečnike 19 cm i 99 cm, izračunati poluprečnik trećeg kruga.



591. Odrediti realan broj a tako da su ekvivalentne jednačine

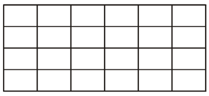
$$|\boldsymbol{x}+\mathbf{1}| = \boldsymbol{a} \text{ i } \boldsymbol{x}^{\mathbf{2}} + \mathbf{2}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{a} - \mathbf{1}.$$

592. Pravilna trostrana prizma ima bazu površine $5\sqrt{2}\ cm^2$. Ravan α sadrži osnovnu ivicu i nagnuta je pod uglom od 45^{O} prema osnovi. Kolika je površina Q presjeka ravni α i prizme?

Republičko takmičenje 2007.

VII razred

593. Odrediti broj pravougaonika na slici.



594. Neka za dvocifrene brojeve $\overline{ab}$ i $\overline{cd}$ važi jednakost $\overline{ab} = 5 \cdot \overline{cd}$. Dokazati da je četverocifreni broj $\overline{abcd}$ djeljiv sa 3.

595. Odrediti najmanji prirodan broj čiji je proizvod cifara 6048.

596. Operacija Δ je definisana na sljedeći način: $a\ \Delta\ b = 1 - \frac{a}{b}$, gdje je $b \neq 0$. Izračunati $(1 \Delta 2)\ \Delta\ (3 \Delta 4)$.

597. U trouglu ABC za težišnu duž AA_1 važi $2 \cdot AA_1 = BC$. Izračunati $\sphericalangle A$ datog trougla ABC.

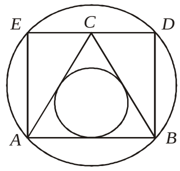
VIII razred

598. Odrediti trocifreni broj $\overline{abc}$ tako da važi: a) $\frac{a+b}{2} = \frac{b+c}{3} = \frac{c+a}{5}$; b) $\frac{a+b}{2}$, $\frac{b+c}{3}$ i $\frac{c+a}{5}$ su prirodni brojevi.

599. Broj $3^{n+2} - 2^{n+2} + 3^n - 2^n$ je djeljiv sa 10 za svaki prirodan broj n. Dokazati.

600. Odrediti sve dvocifrene prirodne brojeve n tako da je broj $\sqrt{\frac{n+12}{n-12}}$ takođe prirodan.

601. U jednakostranični trougao ABC, čije tjeme C pripada stranici DE pravougaonika $ABDE$, je upisana kružnica poluprečnika 1 cm, vidi sliku. Veća kružnica je opisana oko pravougaonika $ABDE$. Izračunati poluprečnik veće kružnice.



602. Dat je kvadrat $ABCD$ stranice $5cm$. Kvadratu je opisana kružnica i na manjem luku kružnice određenom tačkama A i B data je tačka T, različita od tačaka A i B . Izračunati $AT^2+BT^2+CT^2+DT^2$.

IX razred

603. Dat je niz cijelih brojeva: $-7, 14, -21, 28, -35, 42, -49, 56,...$ Ako je zbir prvih n članova jednak 140, odrediti broj n.

604. Za linearnu funkciju $f(x) = ax + b$ važi:

$f(1) + f(2) + f(3) + \cdots + f(10) = 10$ i $f(1) - f(2) + f(3) - \cdots - f(10) = -10$. Izračunati $f(100)$.

605. Koliko rješenja ima jednačina $x+y+z=100$ u skupu prirodnih brojeva?

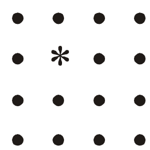
606.Riješiti sistem jednačina : $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xz} = \frac{1}{2}$, $\frac{1}{xz} + \frac{1}{xy} = \frac{5}{6}$, $\frac{1}{yz} + \frac{1}{xy} = \frac{2}{3}$, gdje je $x>0$, $z>0$ i $y>0$.

607. Osnova prave prizme je romb sa uglom od 30°. Osnovna ivica je dužine 4 cm. Ako je manji dijagonalni presjek prizme kvadrat, izračunati površinu prizme.

Opštinsko takmičenje 2008.

VI razred

608. Na kvadratnoj mreži je označeno 11 tačaka i 1 zvjezdica, slika. Koliko kvadrata sa tjemenima u datim tačkama možete nacrtati, ali tako da zvjezdica bude u kvadratu (a ne na granici)?



609. U dvije prodavnice voća, bilo je ukupno 365 kg jabuka i one su prodavane po istoj cijeni. Kada je prva prodavnica prodala određenu količinu jabuka i za to dobila 434 KM, a druga prodavnica za prodanu određenu količinu dobila 875 KM, tada je prvoj ostalo 102 kg, a u drugoj 76 kg. Koliko je u svakoj prodavnici bilo jabuka na početku?

610. Zbir 20 uzastopnih prirodnih brojeva je 2590. Koji su to brojevi?

611. Odrediti cifru a tako da izraz $17 \cdot \overline{16a} + 2007 \cdot 2008$ bude djeljiv sa 12.

612. Majka je svakom od svoje troje djece dala isti džeparac. Kada je svako dijete potrošilo po 30 KM, ukupno im je ostao iznos jednak džeparcu jednog od njih. Koliki je iznos majka izdvojila za džeparac svoje djece?

VII razred

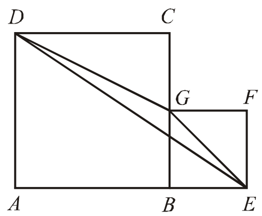
613. U bašti su rasli zasadi kupusa i luka. Mama i tata su isjekli jednu trećinu svih zasada kupusa i jednu šestinu svih zasada luka. Perica je izjavio da su njegovi roditelji isjekli pola zasada u bašti. Da li je Perica u pravu? Odgovor obrazložiti.

614. Učenici sedmog razreda neke škole idu na zimovanje. Prijavile su se dvije devetine učenika više nego što je planirano. Pred polazak je zbog bolesti odustalo tri jedanaestine prijavljenih, pa je na zimovanje otišlo 5 učenika manje nego što je planirano. Koliko je učenika bilo na zimovanju.

615. Za koje je prirodne brojeve a razlomak $\frac{a+89}{a-2}$ prirodan broj?

616. Dužine stranica jednakostraničnog trougla izražene su prirodnim brojem u centimetrima. Koliko je različitih jednakokrakih trouglova moguće konstruisati ako je obim tog trougla 22 cm?

617. Dati su kvadrati $ABCD$ i $BEFG$ kao na slici, pri čemu je dužina stranice manjeg kvadrata 1 dm, a dužina stranice većeg kvadrata 20 cm. Izračunati površinu trougla DEG.



VIII razred

618. Na jednom matematičkom takmičenju trebalo je da učenici riješe nekoliko lakših i nekoliko težih zadataka. Za svaki tačno riješen teži zadatak dobijali su 3 boda, za svaki riješen lakši zadatak 2 boda, a za svaki neriješen lakši zadatak gubili su 1 bod. Jovan je riješio 10 zadataka i osvojio 14 bodova. Koliko je bilo lakših zadataka na tom takmičenju?

619. U tri vreće sadržano je 64,2 kg brašna. U prvoj vreći ima 20% manje brašna nego u drugoj, a u trećoj 42,5% od količine brašna iz prve vreće. Koliko brašna ima u svakoj vreći?

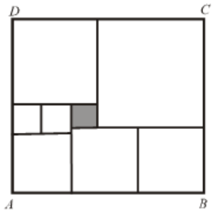
620. Po završetku matematičkog takmičenja autobus sa dijelom takmičara i nastavnika krenuo je prema Doboju te na tom putu vozio brzinom od 100 km/h. Jednog nastavnika su zaboravili i ostavili u mjestu takmičenja. On je uspio sebi osigurati prevoz privatnim automobilom koji je prema Doboju krenuo 5 minuta i 36 sekundi poslije polaska autobusa. Privatni automobil stigao je autobus krečući se brzinom od 120 km/h. Kolika je udaljenost mjesta susreta od mjesta takmičenja?

621. Poljoprivrednik ima dvije njive čije se površine odnose kao 2 : 3. Na tim njivama želi zasaditi maline i jagode tako da površina na kojoj će biti zasađene maline bude jednaka površini na kojoj su zasađene jagode. Manju njivu zasadio je jagodama i malinama u omjeru 3 : 5. U kojem omjeru treba zasaditi veću njivu?

622. Jedan oštar ugao pravouglog trougla iznosi 35^{O}. Koliki ugao zatvara simetrala najvećeg vanjskog ugla sa pravom kojoj pripada najkraća stranica trougla?

IX razred

623. Pravougaonik $ABCD$ razrezan je na kvadrate, kako je pokazano na slici. Zna se da dužina stranice AB iznosi 32 cm. Odrediti dužinu stranice AD.



624. Izračunati bez upotrebe kalkulatora (digitrona) $\sqrt{333^2+444^2}$.

625. Na jednom ostrvu dvije trećine svih muškaracaje oženjeno, a tri petine svih žena je udato. Koji dio stanovnika nije u braku?

626. Zadana je prava p jednačinom $4x+3y-6=0$. Kolika je udaljenost koordinatnog početka od te prave?

627. Zadan je pravougli trougao ABC, s pravim uglom pri vrhu C i veličinom ugla pri tjemenu B 20°. Simetrala ugla BAC siječe katetu BC u tački D, a simetrala ugla ABC katetu AC u tački F. Iz tačaka D i F povučene su normale na hipotenuzu, i one je sijeku u tačkama M i N. Izračunaj veličinu ugla MCN.

Regionalno takmičenje 2008.

VI razred

628. Za numerisanja elemenata neke mašine upotrijebljeno je prvih sto prirodnih brojeva. Koliko puta su pri tome napisane cifre: a) 0; b) 7; c) 1?

629. Naći sumu u primjeru sabiranja

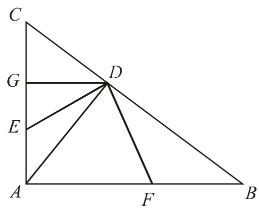
$$\begin{array}{r} d\ v\ e\ s\ t\ i \\ +\ t\ r\ i\ s\ t\ a \\ \hline o\ t\ u\ s\ o\ c\ a \end{array}$$

ako je $o=u$, a ostalim različitim slovima odgovaraju različite cifre.

630. Nekoliko učenika treba rasporediti u grupe. Ako ih rasporedimo po 2, ostaće jedan neraspoređen, ako ih rasporedimo po 3 ostaće dva neraspoređena, a ako ih rasporedimo po četiri ostaće tri neraspoređena. Koji je najmanji broj učenika koje treba rasporediti?

631. Odrediti prost broj p i prirodan broj n tako da važi jednakost $p^2+2n=20$.

632. Napisati sve trouglove sa slike.



VII razred

633. Koliko ima desetocifrenih prirodnih brojeva koji se zapisuju samo sa ciframa 0 i 5, a koji su djeljivi sa 9?

634. U biblioteci ima 9500 knjiga, od čega je 80% na srpskom, a ostalo na engleskom i ruskom jeziku. Od knjiga na stranim jezicima 60% je na engleskom jeziku. Koliko u toj biblioteci ima knjiga na engleskom, a koliko na ruskom jeziku?

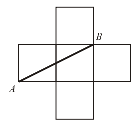
635. Odrediti oštre uglove pravouglog trougla s pravim uglom kod tjemena C, ako je ugao između visine i simetrale ugla iz tjemena C jednak jednoj devetini tu-pog ugla kojeg čine simetrale oštrih uglova.

636. Tanja je planirala pročitati knjigu za 3 dana. Prvog je dana pročitala jednu trećinu knjige, a drugog dvije petine knjige i utvrdila je da joj za treći dan ostaje 28 stranica manje nego što je pročitala drugog dana. Koliko stranica ima knjiga?

637. Neka tačke A i B pripadaju kružnici k sa središtem S i poluprečnikom r, te neka je $AB<2r$. Simetrala duži AB siječe duž AB u tački P, a kružnicu k u tačkama C i D, pri čemu su tačke C i S sa iste strane prave AB. Dokazati da je $PD<PB$.

VIII razred

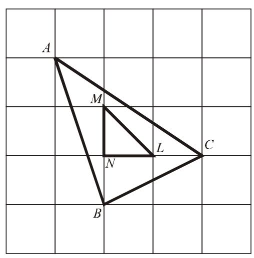
638. Figura na slici je sastavljena od 5 podudarnih kvadrata. Ako je $AB = 10\ cm$, odrediti površinu date figure.



639. Dat je trougao ABC, pri čemu je $AC>AB$. Unutar trougla je data tačka N tako da dužina AN polovi ugao BAC i $AN\perp BN$. Ako je M sredina stranice BC onda je $MN = \frac{AC-AB}{2}$. Dokazati.

640. Za prirodne brojeve a, b, c, d i racionalan broj x važe jednakosti $2a=3b=4c=5d= x\ (a+b+c+d)$. Odrediti broj x.

641. U kvadratnoj mreži smještena su dva trougla ABC i MNL kao na slici. Odrediti omjer površina tih trouglova.



642. Izračunati (bez upotrebe kalkulatora): $\sqrt{333^2+444^2}$.

IX razred

643. Odrediti tri prosta broja tako da je njihov proizvod pet puta veći od njihovog zbira.

644. Računar ispisuje brojeve na sljedeći način: prvi broj je 37, drugi izračunava tako što pomnoži cifre prvog i doda 37, dakle 58. Treći izračunava tako što množi cifre drugog i dodaje 37. Općenito, brojeve formira tako što pomnoži cifre prethodnog broja i doda 37. Ako je računar startovao u 12 časova i svake sekunde ispisao novi broj koji je broj ispisao u 12 časova i 5 minuta.

645. Ako je $9x^2+4y^2-12xy-16a^2=12$ i $3x-2y+4a=4$, koliko je $3x-2y$?

646. Osnovne ivice trostrane prizme su $a=9$ cm, $b=10$ cm i $c=17$ cm, a visina prizme je $H=h_a$, gdje je h_a visina osnove koja odgovara stranici a. Odrediti površinu i zapreminu prizme.

647. Odrediti površinu trapeza $ABCD$ ako je $AB=11cm$, $BC=5$ cm, $CD=7$ cm i $AD=3$ cm.

Republičko takmičenje 2008

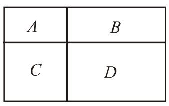
VII razred

648. Da li je broj napisan sa 81 jedinicom (cifrom 1) djeljiv sa 81? Obrazložiti odgovor.

649. Dat je jednakokraki trougao ABC u kome je $CA=CB$ i $\sphericalangle ACB=90^{\circ}$. Tačka M je u unutrašnjosti trougla ABC takva da je $\sphericalangle MBA=30^{\circ}$, $\sphericalangle MAB=10^{\circ}$. Izračunaj $\sphericalangle AMC$.

650. Duž AC ima središte u tački K i siječe duž BD u njegovom središtu S. Dokazati, da su središta M i N duži AB i CD simetrične u odnosu na središte duži SK.

651. Pravougaonik je podijeljen na četiri manja pravou-gaonika A, B, C i D, kao na slici. Površine pravougaonika A,B, C su redom, 200 cm^2, 30$2$ cm^2, 600 cm^2. Kolika je površina cijelog pravougaonika?



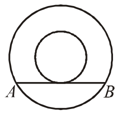
652. Na telefonsku centralu priključeno je 55 telefona. Mogu li se telefoni povezati tako da svaki od njih ima diretnu vezu sa tačno 11 drugih telefona?

VIII razred

653. Dokazati da je vrijednost izraza $\frac{2^{17}+2^{16}+\cdots+2^2+2^1+1}{2^8+2^7+\cdots+2^2+2^1+1}:3^3$ cijeli broj.

654. U trouglu ABC je $\frac{h_a \cdot h_b}{h_c} = c$ gdje su h_a, h_b, h_c dužine visina i c dužina jedne stranice trougla. Izračunati jedan od uglova tog trougla.

655. Zadani su kružni prsten i duž AB, koja je tetiva većeg kruga i dodiruje manji krug, vidi sliku. Izračunati površinu kružnog prstena , ako je AB=10cm.



656. Izračunati vrijednost izraza

$$A=4a^2x^2-4acx^2+c^2x^2-16a^2xy+16acxy-4c^2xy+16a^2y^2-16acy^2+4c^2y^2,$$

ako je a=3276, c=5552, x=9463, y=4731.

657. U trouglu ABC je ugao $\sphericalangle CAB=\alpha=60^{\circ}$. Dokazati da podnožja visina BB_1, CC_1 i središte stranice BC čine jednakostraničan trougao.

IX razred

658. Broj 9876543210 podijeliti sa 86420, ostatak dijeljenja podijeliti sa 6420, novi ostatak podijeliti na 420, a ostatak na 20. Koliki će biti ostatak nakon ovih dijeljenja? (Obrazložiti ostatak bez provođenja dijeljenja).

659. Odrediti sve parove cijelih pozitivnih brojeva čija je razlika kvadrata jednaka 195.

660. Dijagonale proizvoljnog trapeza dijele trapez na četiri trougla. Površine trouglova kojima pripadaju osnovice su P_1 i P_2. Izraziti površinu P trapeza pomoću P_1 i P_2.

661. Dokazati nejednakost $\frac{1}{8} \cdot \frac{(a-b)^2}{a} \leq \frac{a+b}{2} - \sqrt{a \cdot b} \leq \frac{1}{8} \cdot \frac{(a-b)^2}{b}$, ako je $0<b\leq a$. Odrediti uslove kada nejednakosti prelazi u jednakost.

662. U trostranoj prizmi čija je osnova pravougli jednakokraki trougo, može se upisati lopta prečnika 2 cm. Kolika je zapremina te prizme? (Napomena: Upisana lopta dodiruje sve strane prizme).

Opštinsko takmičenje 2009.

VI razred

663. Izračunati (bez upotrebe kalkulatora)

$$5\cdot(31\cdot2\cdot44+38\cdot2\cdot22)+11\cdot(4\cdot117-17\cdot2\cdot2)\ 4+11\cdot7\cdot(31\cdot2+2\cdot69).$$

664. Obim jednakokrakog trougla ABC ($AB=BC$) je 19 cm, a krak je 2 cm duži od osnovice. Odrediti dužinu stranica trougla ABC.

665. U jednoj posudi nalazi se tri puta više mlijeka nego u drugoj. Ako u prvoj posudi dolijemo 3 litre, a u drugoj 5 litara, tada će u prvoj posudi biti dva puta vi-

še mlijeka nego u drugoj. Koliko je litara mlijeka bilo u svakoj posudi prije dolijevanja?

666. Zbir dva prirodna broja je 512, a njihov najveći zajednički djelilac je 64. Koji su to brojevi ?

667. Dvije prave se sijeku u tački S i obrazuju četiri ugla. Zbir unakrsnih oštrih uglova iznosi dvije jedanaestine jednog od unakrsnih tupih uglova. Odredi mjerne brojeve svakog od ta četiri ugla.

VII razred

668. Ako neki broj podijelimo sa 20, pa dobijenom količniku dodamo 3,75 i dobijeni zbir pomnožimo sa 0,4, dobit ćemo broj koji je za 8,25 veći od 20. Odrediti početni nepoznati broj.

669. Učenik je trebao pomnožiti 78 s dvocifrenim brojem kojemu je cifra desetica tri puta veća od cifre jedinica. On je greškom zamijenio cifre u drugom činiocu i tako dobio proizvod manji od tačnog proizvoda za 2808. Odrediti tačan proizvod.

670. Dužine stranica pravougaonika razlikuju se za 4,2 cm, a njegov je obim 23,2 cm. Nad njegovom dužom stranicom kao osnovicom konstruisan je s vanjske strane jednakokraki trougao kome je obim jednak obimu pravougaonika. Odrediti dužine stranica tog trougla.

671. Tri daske imaju ukupnu dužinu 14,5 m. Ako od prve odrežemo dasku jednaku polovini njene dužine, od druge trećinu njene dužine, a od treće četvrtinu njene dužine, preostali dijelovi daske imaju jednake dužine. Odrediti dužine dasaka prije rezanja.

672. Dat je jednakokraki trougao ABC. Simetrala spoljašnjeg ugla uz osnovicu AB i simetrala spoljašnjeg ugla nasuprot osnovice sijeku se pod uglom od 71°. Odrediti unutrašnje uglove trougla ABC.

VIII razred

673. Za koje vrijednosti parametra a jednačina $ax-2a=3x-8$ ima pozitivno rješenje ?

674. Odrediti sve dvocifrene brojeve koji su za 1 manji od šestostrukog zbira njegovih cifara.

675. Odrediti obim pravilnog mnogougla stranice dužine 12 cm, ako je broj njego-vih dijagonala 252 ?

676. Izračunati površinu jednakokrakog trapeza čije su osnovice 6,8 cm i 4 cm,

a krak 5 cm.

677. Nad stranicama AC i BC jednakostraničnog trougla ABC nacrtani su s vanjske strane kvadrati $ACMN$ i $BCPQ$. Prava koja prolazi tačkom B i središtem kvadrata $ACMN$ siječe pravu PM u tački D. Dokazati da je trougao BPD jednakokraki.

IX razred

678. Izračunati: $\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}-\frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}$.

679. Odrediti cijele brojeve za koje je razlomak $\frac{a^2-11a+24}{a^2-9a+8}$ takođe cijeli broj .

680. Dat je pravougaonik $ABCD$, tako da je $AC=2BC$. Neka je E podnožje normale iz tjemena B na dijagonalu AC. Odrediti obim i površinu pravougaonika $ABCD$ ako je $CE=5\ cm$.

681. Površina kružnog prstena je $161\pi\ cm^2$, a širina 7 cm. Odrediti poluprečnike krugova koji obrazuju taj prsten ?

682. Dat je pravougli trougao ABC s pravim uglom u tjemenu C, pri čemu je $BC<AC$. Kružnica sa centrom u tački C poluprečnika BC siječe hipotenuzu AB u tački D, tako da je $BD=98\ cm$ i $AD=527\ cm$. Odrediti dužine kateta pravouglog trougla ABC.

Regionalno takmičenje 2009.

VI razred

683. Ako između cifara dvocifrenog broja napišemo nulu, dobija se trocifren broj koji je 9 puta veći od početnog dvocifrenog broja. Odrediti te brojeve.

684. Zbir ugla koji je komplementan uglu α i ugla koji je suplementan uglu α, tri puta je veći od ugla α. Koliki je ugao α ?

685. Odrediti prost broj p i prirodan broj n tako da važi jednakost $p^2+2n=20$.

686. Dat je pravougaonika $ABCD$ čiji je obim 50 cm. Na stranici AB odabrana je tačka M takava da je dužina duži AM za 5 cm manja od dužine stranice BC, a dužina duži BM tri puta veća od dužine duži AM. Izračunati površinu pravougaonika $ABCD$.

VII razred

687. Za proizvoljne cijela broja m i n uvijek je bar jedan od brojeva $m+n$, $m-n$, $m\cdot n$, djeljiv sa 3. Dokazati.

688. Ugao između hipotenuzine visine i hipotenuzine težišne duži je 16°. Izračunati unutrašnje uglove tog trougla , ako je $\alpha>\beta$.

689. Cijena nekoj robi povećana je za 37%. Za koliko procenata treba smanjiti novu cijenu da bi bila jednaka početnoj cijeni?

690. Šestocifreni broj počinje cifrom 5. Ako se ta cifra premjesti s početka na kraj, tj. izbriše se na početku i dopiše na kraju, dobija se broj koji je četiri puta manji od prvobitnog broja. Odrediti taj šestocifreni broj.

VIII razred

691. Izračunati vrijednost izraza $\frac{a+b}{a+b}$ ako je $a>b>0$ i $a^2+b^2=6ab$.

692. Dat je jednakostraničan trougao ABC i tačka M na stranici AB. Nad duži CM konstruisan je jednakostraničan trougao CMN, pri čemu su tačke M i N sa različitih strana duži BC. Dokazati da su duži AC i BN paralelne.

693. Ugao na osnovici jednakokrakog trapeza je 75^{O}, dužine osnovica obrazuju razmjeru 2 : 1, a krak je dužine 10 cm. Odrediti površinu trapeza.

694. Neki dvocifreni broj je djeljiv sa 3. Ako se tom broju doda 27 dobiće se broj napisan istim ciframa, ali u obrnutom redosljedu. Odrediti dvocifreni broj sa navedenim svojstvima?

IX razred

695. Riješiti jednačinu (по x) $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$, ako su brojevi a, b, c i $a+b+c$ su različiti od nule.

696. U pravouglom trouglu ABC na katetama AC i BC date su redom tačke M i N. Dokazati da važi: $AN^2+BM^2=MN^2+AB^2$

697. U jednakokrakom pravouglom trouglu upisan je romb tako da je jedno tjeme romba ujedno i tjeme oštrog ugla pravouglog trougla, a preostala tri tjemena romba leže svaki na jednoj stranici datog pravouglog trougla. Izračunati poluprečnik kružnice opisane oko pravouglog jednakokrakog trougla ako je dužina stranice romba $3(\sqrt{2}-1)$ cm.

698. Izračunati $2^{20}-\sqrt{(1+2^{11}+2^{20})(1-2^{11}+2^{20})}$

Republičko takmičenje 2009.

VII razred

699. Riješiti jednačinu: $\left(\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{48\cdot 49}+\frac{1}{49\cdot 50}\right)\cdot|x-5|=98.$

700. U unutrašnjosti trougla ABC data je proizvoljna tačka M. Dokazati da je:

a) $AM+BM<AC+CB$; b) $\sphericalangle AMB>\sphericalangle ACB$.

701. Odrediti razlomke a, b, c i d sa jednocifrenim imeniocima, tako da važi

$$\frac{7}{9}<a<b<c<d<\frac{8}{9}.$$

702. Dat je trapez $ABCD$. Simetrale spoljašnjih uglova trapeza kod tjemena A i D sijeku se u tački M, a simetrale spoljašnjih uglova kod tjemena B i C sijeku se u tački N. Ako je MN=5 521 004,5 cm, izračunati obim trapeza $ABCD$.

703. Na regionalnom takmičenju iz matematike učestvovala su 82 učenika. Dokazati da se između njih može izabrati 10, takvih da su svi iz istog grada ili po jedan iz 10 različitih gradova.

VIII razred

704. Dužina stranice romba je 9 cm, a zbir dužina njegovih dijagonala je 24 cm. Odrediti površinu romba.

705. Odrediti najmanji i najveći osmocifreni broj čiji je zbir cifara 40, ako su im sve cifre različite?

706. U unutrašnjosti trougla ABC izabrana je tačka M. Dokazati da je $\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_a}+\frac{n_c}{h_a}=1$, gdje su n_a, n_b, n_c udaljenosti tačke M od stranica trougla, a h_a, h_b, h_c visine datog trougla.

707. Izračunati vrijednost izraza $\sqrt{(3x-2)(x-2)-2x(x-2)}-\sqrt{2}$ za $x=3-\sqrt{2}$.

708. Riješiti jednačinu $\frac{2008^{2008}+2008^{2009}}{2009^{2009}}=x^{2008}$.

IX razred

709. Na stranicama AD i BC paralelograma $ABCD$ date su tačke M i N tako da je $AM=CN$, P proizvoljna tačka na stranici AB. Prave MN, CP i DP dijele paralelogram na tri trougla i tri četverougla. Dokazati da je površina jednog trougla jednaka sumi površina druga dva trougla, a površina jednog četverougla jednaka površini druga dva četverougla .

710. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu $xy+3y-5x=18$.

711. Bočne strane ABS, BCS i CAS trostrane piramide $ABCS$ su međusobno normalne i imaju redom površine 54 cm^2, 96 cm^2 *i* 72 cm^2. Izračunati zapreminu i dužine stranica piramide.

712. Dat je broj $M=19^{91}-91^{19}$. a) Dokazati da je: a) $M>0$; b) M djeljivo sa 72.

713. Ako je $xyz=1$, onda je $(x+1)(y+1)(z+1)\geq 8$. Dokazati.

Opštinsko takmičenje 2010.

VII razred

714. Cifra sa najvećom mjesnom vrijednošću u petocifrenom broju je 7. Ako se ta cifra izostavi, preostali broj je 17 puta manji od datog broja. Koji je to broj?

715. Odrediti sve cijele brojeve n za koje važi $\frac{1}{3}<\frac{1-n}{5}<\frac{11}{12}$.

716. Dat je pravougli trougao sa pravim uglom kod tjemena C i oštrim uglom $\beta=52^{\circ}$. Izračunati ugao između visine koja odgovara hipotenuzi i težišne duži koja odgovara hipotenuzi.

717. U pravougaoniku $ABCD$ simetrala ugla kod tjemena A siječe stranicu CD u tački M, pri čemu je $CM=15$ cm. Obim pravougaonika je 70 cm. Kolika je njegova površina?

718. Brat i sestra imali su isti broj jabuka. Brat je dao sestri paran broj jabuka, poslije čega je sestra imala 12 jabuka više od brata. Koliko je najmanje jabuka na početku mogao imati svako od njih.

VIII razred

719. U jednačini $5x^2=3k$ odrediti sve cjelobrojne vrijednosti promjenljive x, ako $k \in \mathbb{N}$ i $k<100$.

720. Koliko ima prirodnih brojeva manjih od 3000 čiji je proizvod cifara 210?

721. Nad stranicama jednakostraničnog trougla ABC stranice a konstruisani su sa spoljašnje strane kvadrati.Tjemena, koja ne sadrže tačke A, B i C, određuju šesto-ugao. Izračunati obim i površinu tog šestougla.

722. U trouglu ABC je $\sphericalangle ABC=15^{\circ}$, $\sphericalangle ACB=30^{\circ}$. Prava koja sadrži tjeme A i normalna je na stranicu AB siječe stranicu BC u tački D. Dokazati da je $BD=2\cdot AC$.

723. U trapezu $ABCD$ dijagonala AC je normalna na krak BC i polovi $\sphericalangle BAD$. Izračunati površinu trapeza, ako je $\sphericalangle ABC=60^{\circ}$ i ako je obim trapeza 2 cm.

IX razred

724. Dvije kružnice različitih polupečnika dodiruju se izvana u tački A. Tangenta na obje kružnice, koja ne prolazi tačkom A, dodiruje date kružnice u tačkama B i C. Odrediti veličinu ugla BAC.

725. Dat je trougao ABC stranica a=15 cm, b=13 cm i c=14 cm i visine CD. Ako tačka E polovi stranicu AB, izračunati dužinu duži DE.

726. Izračunati, bez upotrebe kalkulatora (digitrona): $\frac{\sqrt{225}\cdot\sqrt{2,25}}{\sqrt{0,225}\cdot\sqrt{2,25}}$.

727. Odrediti brojeve x i y za koje važi: $x^2+y^2+4x-16y+68=0$.

728. Dokazati da je između 100 proizvoljnih cijelih brojeva uvijek moguće izabrati 15 takvih da je razlika bilo koja dva od njih deljiva sa 7.

Regionalno takmičenje 2010.

VII razred

729. Odrediti najmanji četverocifreni broj djeljiv sa 9 i čiji je proizvod cifara 180.

730. Zbir dva spoljašnja ugla trougla ABC je 270°. Dokazati da je trougao ABC pravougli.

731. Odrediti uređene parove (x,y) prirodnih brojeva x i y tako da važi jednakost

$$x+\frac{4}{y}=2010.$$

732. Za 4 dana prodato je žito iz magacina. Prvog dana prodato je jedna trećina žita, drugog dana jedna četvrtina ostatka, trećeg dana 5 puta više nego četvrtog, a četvrtog dana 90 tona manje nego prvog dana. Koliko je tona žita prodato za sva četiri dana?

VIII razred

733. Ako za realne brojeve a, b, c, d važi $a^2+d^2-2(ab+bc+cd-b^2-c^2)=0$, dokazati da je $a=b=c=d$.

734. Dat je proizvoljan četverougao $ABCD$. Neka su M, N, P, Q, R, S redom središta duži AB, BC, CD, DA, AC, BD. Dokazati da se prave MP, NQ, RS sijeku u jednoj tački.

735. Dijagonale trapeza dužine 5 cm su međusobno su normalne. Izračunati površinu tog trapeza.

736. Dokazati da je izraz z^5-5z^3+4z djeljiv sa 120, za svaki cijeli broj z.

IX razred

737. Dokazati da u grupi od 6 učenika postoje bar 3 od kojih svaki poznaje preostala 2, ili postoje 3 od kojih svaki ne poznaje nijednog od preostala dva učenika.

738. Dužine stranica pravouglog trougla su cijeli brojevi. Mogu li dužine obje katete biti neparni brojevi? Odgovor obrazložiti.

739. Učenik je potrošio izvjesnu sumu novca pri kupovini tašne, knjige i olovke.

Ako bi tašna bila 5 puta jeftinija, olovka 2 puta jeftinija, a knjiga 2,5 puta jeftinija nego što je stvarna cijena, tada bi učenik potrošio 160 KM. Ako bi tašna bila jeftinija 2 puta, olovka 4 puta, a knjiga 3 puta, tada bi za takvu kupovinu učenik platio 240 KM. Koliko je ukupno novca učenik potrošio?

740. Pravougli trougao ima katete dužina 60 cm i 80 cm. Neka su M i N središta ovih kateta. Kružnica prečnika MN siječe hipotenuzu u tačkama P i Q. Izračunati dužinu duži PQ.

Republičko takmičenje 2010.

VII razred

741. Kvadrat obima 2012 cm podijeljen je pravom na dva pravougaonika čiji se obimi razlikuju za 594 cm. Za koliko se razlikuju širine tih pravougaonika?

742. Proizvod dvije hiljade jedanaest cijelih brojeva je 12. Izračunati koliko taj proizvod sadrži:

a) najmanje parnih cijelih brojeva; b) najviše parnih cijelih brojeva;

c) najmanje negativnih cijelih brojeva; d) najviše negativnih cijelih brojeva.

743. Odrediti uređ ene parove (p,q) prostih brojeva p i q tako da je $2p+3q=200$.

744. Dat je nejednakokraki oštrougli trougao ABC. Nad stranicama AB, BC, CA kao nad osnovicama konstruisani su spolja jednakostranični trouglovi ABM, BCN i CAP. Dokazati da je $AN=BP=CM$.

745. Unutar trougla ABC odrediti tačku M tako da proizvod rastojanja te tačke od stranica trougla ima najveću vrijednost.

VIII razred

746. Dokazati da za svaki pravougli trougao važi jednakost $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{1}{h^2}$, gdje su a, b dužine kateta, a h dužina hipotenuzine visine.

747. Dat je trougao ABC čija je stranica AB=6 cm, ugao $\alpha=60^{\circ}$, a ugao $\beta=75^{\circ}$. Izračunati površinu ovog trougla.

748. Može li izraz $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$ biti jednak nuli, ako za realne brojeve a, b, c važi $a\neq b\neq c$? Odgovor obrazložiti.

749. Dat je trougao ABC, čije su dužine stranica AB=8 cm, BC=16 cm i AC=10 cm. Na stranici AB odabrana je tačka M tako da normala iz tačke M na simetralu ugla BAC siječe stranicu AC u tački N, a normala iz tačke M na simetralu ugla ABC siječe stranicu BC u tački P, pri čemu je $CP=2\cdot CN$. U kojem omjeru tačka M dijeli stranicu AB?

750. Dokazati da se svaki prost broj $p>2$ može na jedinstven način predstaviti kao razlika kvadrata dva prirodna broja

IX razred

751. Dokazati nejednakost $\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{b^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, ako su a,b i c pozitivni realni brojevi.

752. Ako za realni broj $x>1$ važi $x-\frac{1}{x}=\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}$, koliko je $x+\frac{1}{x}$?

753. Neka je $A=\frac{3^{2009}+1}{3^{2010}+1}$ i $B=\frac{3^{2010}+1}{3^{2011}+1}$. Šta je veće: A ili B?

754. Kroz središte P hipotenuze AB pravouglog trougla ABC nacrtana je normala na hipotenuzu koja katetu BC siječe u tački M, a produžetak katete AC u tački N. Izraziti dužine stranica a, b i c trougla ABC pomoću dužina duži $m=PM$ i $n=PN$.

755. Odrediti sve brojeve oblika $\overline{31a}$ i $\overline{62b1}$ tako da njihov proizvod bude djeljiv sa 15.

Opštinsko takmičenje 2011.

VII razred

756. Napisati sve četverocifrene brojeve djeljive i sa 4 i sa 9, koji pri dijeljenju sa 10 imaju ostatak 4, a cifra hiljada je tri puta veća od cifre stotica.

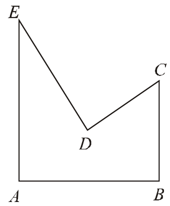
757. Odrediti sve pravougaonike čije su dužine stranica prirodni brojevi, a kojima je mjerni broj površine jednak mjernom broju obima.

758. Jedan radnik završi posao za 15 dana, a drugi radnik isti posao završi za 18 dana. Ako se prvom i drugom radniku pridruži treći radnik, sva trojica zajedno završiće taj posao za 7,5 dana. Za koliko dana bi treći radnik sam završio ovaj posao?

759. U jednakokrakom trouglu ABC s osnovicom AB i oštrim uglom ACB, visina iz tjemena B siječe krak AC u tački E. Neka je D tačka na pravoj AB takva da je trougao BED jednakokraki s osnovicom DB. Koliki je ugao između DE i BC?

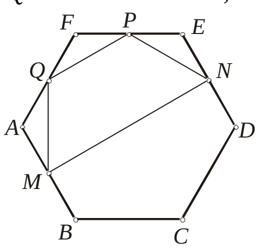
VIII razred

760. Izračunati obim mnogougla na slici ako je AE=13cm, BC=7 cm, ED=8 cm, CD=6 cm, $\sphericalangle EAB$=$\sphericalangle ABC$=$\sphericalangle CDE$=90^{O}.



761. Odrediti jednakost koja povezuje brojeve a, b i c ako je $a=m^2+n^2$, $b=2mn$ i $c=m^2-n^2$.

762. Odrediti omjer površina pravilnog šestougla $ABCDEF$ i četverougla $MNPQ$, na slici, ako su M, N, P i Q središta stranica AB, DE, EF i FA.



763. Šta je veće 2^{2010} ili 5^{861}?

IX razred

764. Odnos površina strana datog kvadra je 2 : 3 : 5. Izračunati odnos dužina ivica tog kvadra.

765. Bočna strana pravilne trostrane piramide je jednakokraki trougao sa uglom od 30^{O} pri vrhu. Dužina bočne ivice piramide je 8 cm. Izračunati površinu piramide.

766. Izračunati razliku izraza $1^2+2^2+3^2+...+2010^2$ i $1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+...+2009\cdot2011$.

767. Ako je od dva uzastopna prirodna broja veći broj kvadrat prirodnog broja, tada je proizvod ta dva uzastopna prirodna broja djeljiv sa 12. Dokazati.

Regionalno takmičenje 2011.

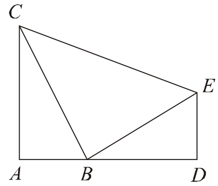
VII razred

768. Proizvod dva dvocifrena broja u dekadnom sistemu je zapisan samo pomoću četvorki. Odrediti činioce tog proizvoda.

769. Simetrale uglova BAC i ABC trougla ABC sijeku se pod uglom od 124^{O}. Odrediti mjeru ugla ACB.

770. U jednoj korpi ima 5,75 kg jabuka više nego u drugoj korpi. Koliko kilograma jabuka treba uzeti iz prve korpe da bi u njoj ostalo 2,25 kg manje nego u drugoj korpi?

771. Na duži AD data je tačka B, takva da su trouglovi ABC i DEB pravougli, a trougao CBE je jednakokraki pravougli, slika. Dokazati da su trouglovi ABC i DEB podudarni.



772. U školi ima 800 učenika. Dokazati da bar tri učenika imaju rođendan istog datuma.

VIII razred

773. Ako je $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{11}{10}$ i $\frac{a}{c}=\frac{5}{2}$, odrediti razlomke $\frac{a}{b}$ i $\frac{a}{c}$.

774. Odrediti vrijednost izraza $\sqrt{\left(\sqrt{5}-5\right)^2}-\left(\sqrt{5}+5\right)$.

775. U pravouglom trouglu ABC dužine kateta AC i BC su redom 30 cm i 40 cm. Ako je C_1 središte hipotenuze, a C_2 podnožje hipotenuzine visine, izračunati dužinu duži C_1C_2.

776. Dužine stranica AB i BC pravougaonika $ABCD$ su redom 5 cm i 3 cm. Presjek prave, koja sadrži tjemena B i C, i simetrale ugla BAD je tačka M, a presjek prave, koja sadrži tjemena A i D, i simetrale ugla BCD je tačka N. Izračunati površinu četverougla $ANCM$.

777. Odrediti najmanji prirodan broj je djeljiv sa 15, čija je svaka cifra 0 ili 4.

IX razred

778. Odrediti sve vrijednosti parametra m tako da je zbir razlomaka $\frac{m+1}{m+4}$ i $\frac{5}{m-7}$ jednak njihovom proizvodu.

779. U jednakostranični trougao ABC upisan je krug K. Zatim su upisana tri kruga tako da svaki od njih dodiruje dvije stranice i upisani krug K. Odrediti omjer površina kruga K i zbira površina ta tri upisana kruga.

780. Neka su a, b i c pozitivni realni brojevi. Dokazati nejednakost

$$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 8abc.$$

781. Kocka ivice dužine a presječena je ravni na dva kvadra. Odrediti omjer zapremina tih kvadara ako je omjer njihovih površina 2 : 3.

782. Odrediti uređene parove (p, q) prostih brojeva p i q tako da je $2p+3q=201$.

Republičko takmičenje 2011.

VII razred

783. Zbir prirodnih brojeva a, b i c je 10. Odrediti najmanju i najveću vrijednost izraza $2010\cdot a+2011\cdot b+2012\cdot c$. Za koje vrijednosti a, b i c se dobija najmanja, odnosno najveća vrijednost izraza?

784. Odrediti sve proste brojeve p tako da su $p+10$ i $p+14$ takođe prosti brojevi. Odgovor obrazložiti.

785. Jednakokraki trougao ABC sa osnovicom AB ima krak 3 puta duži od osnovice. Ako je D središte osnovice, a tačka E središte kraka AC, onda je obim četverougla $CEDB$ za 42 cm veći od obima trougla EAD. Izračunati obim trougla ABC.

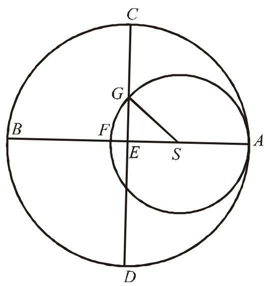
786. Neka tačke M, K pripadaju, redom, stranicama BC, AC trougla ABC. Da li duži AM i BK mogu da se sijeku tako da tačka presjeka polovi ove duži? Odgo-vor obrazložiti.

787. Prva četiri člana niza su 1, 9, 9, 7. Svaki sljedeći član je poslednja cifra zbira prethodna četiri člana niza. Dakle imamo niz $1, 9, 9, 7, 6, 1, 3, \cdots$. Da li je na 2011. mjestu parna ili neparna cifra ? (Odgovor obrazložiti!)

VIII razred

788. Neka su $x_1, x_2, x_3, \cdots, x_k, \cdots, x_{2011}$, $(x_{i+1} > x_i)$ uzastopni cijeli brojevi i neka je $-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \cdots + x_{2010} - x_{2011} = 2012$. Odrediti broj x_{2011}.

789. Dvije kružnice dodiruju se iznutra u tački A. Neka su AB i CD međusobno okomita dva prečnika veće kružnice. Odrediti prečnike ovih kružnica ako je $BF=5$, $CG=3$ (vidi sliku).



790. Odrediti vrijednost izraza $1-\frac{x+y}{x-y}$, ako je $2x^2+2y^2=5xy$; $0<x<y$.

791. U trapezu $ABCD$ dijagonala AC je normalna na krak BC i polovi $\sphericalangle BAD$. Izračunati površinu trapeza, ako je $\sphericalangle ABC=60^{\circ}$ i ako je obim trapeza 2 m.

792. Odrediti vrijednost izraza $P(x,y)=x^{2011}+2011-y$, ako je $x^2+y^2+2xy-6y+10=0$.

IX razred

793. Za pozitivne racionalne brojeve a, b, c važi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$. Dokazati da je broj $\sqrt{a^2+b^2+c^2}$ racionalan.

794. Konveksni m-to ugao ima 2011 dijagonala više od konveksnog n-to ugla. Odrediti mnogouglove sa navedenim svojstvom

795. Neka je u trouglu ABC: $\sphericalangle A=\alpha=60^{\circ}$, S središte stranice BC, BB_1 i CC_1 visine iz tjemena B, odnosno C. Dokazati da je trougao SC_1B_1 jednakostraničan.

796. Za stranice a, b i c trougla ABC važi jednakost $a^2=b(b+c)$. Odrediti omjer uglova α i β.

797. Ravan koja je paralelna osnovi kupe dijeli njen omotač na dva dijela jednakih površina. U kom omjeru dijeli visinu kupe?

Opštinsko takmičenje 2012.

VIII razred

798. Ako je $a^2+b^2-12a+2b+37=0$, izračunati $b^{2012}+2102\cdot a$.

799. Izračunati vrijednost izraza $\frac{a^2+b^2}{ab}$ ako je $\frac{a+b}{b}=2-\sqrt{2}$.

800. Hipotenuzina visina u pravouglom trouglu dijeli hipotenuzu na dva dijela od 16 cm i 9 cm. Izračunati obim i površinu tog trougla.

801. Neka su P i R tačke stranica AB i CD paralelograma $ABCD$ i neka se duži PC i BR sijeku u tački Q, a AR i DP u tački S. Dokazati da je površina četverougla $PQRS$ jednaka zbiru površina trouglova ASD i BCQ.

802. Brojevi 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 su podijeljeni u tri grupe. Dokazati da bar u jednoj od tih grupa proizvod brojeva nije manji od 72.

IX razred

803. Ako je $a=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots+\frac{2012^2}{4023}$ i $b=\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+\cdots+\frac{2011^2}{4023}$, izračunati vrijednost izraza $a-b$.

804. Prava koja sadrži tjeme A trougla ABC siječe stranicu BC u tački D, tako da je $\frac{BD}{DC}=\frac{2011}{2012}$. Težišna duž CE siječe pravu AD u tački F. Odrediti omjer duži CF i FE.

805. Dva kruga se sijeku tako da je šest sedmina većeg kruga van presjeka, a tri četvrtine manjeg kruga van presjeka. Ako je poluprečnik većeg kruga 7 cm izračunati površinu manjeg kruga.

806. Na koliko načina se sedam novčanica od 1, 2, 5, 10, 20 i 50 KM mogu rasporediti u lijevi i desni džep?

807. Ako je $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$, tada je $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a}{c}$. Dokazati.

Opštinsko takmičenje 2012. (ponovljeno)

VIII razred

808. Neka je $ABCD$ proizvoljan četverougao površine 3. Na stranici AB date su tačke M i N, takve da je $AM=MN=NB$, a na stranici CD tačke P i Q, takve da je $CP=PQ=QD$. Dokazati da četverougao $MNPQ$ ima površinu jednaku 1.

809. Dokazatii da je $4^9+6^{10}+3^{20}$ kvadrat prirodnog broja.

810. Dužine stranica trougla su tri uzastopna prirodna broja, ne manja od 3. Dokazati da visina trougla na srednju po veličini stranicu dijeli tu stranicu na dijelove čija je razlika 4.

811. Izračunati vrijednost izraza $\sqrt{(3x-2)(x-2)-2x(x-2)}-\sqrt{2}$, za $x=3-\sqrt{2}$.

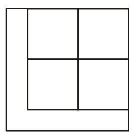
812. Dokazati da je broj $7^{2012}-1$ deljiv sa 10.

IX razred

813. Dokazati da je broj $8^{2012}-6^{2011}$ djeljiv sa 10.

814. Odrediti vrijednost izraza $a(a+2)+c(c-2)-2ac$, ako je $a-c=7$.

815. Kvadrat je podijeljen na pet dijelova jednakih površina i to četiri kvadrata i jedan mnogougao u obliku slova L, slika. Kolika je dužina najkraće stranice datog mnogougla, ako je površina velikog kvadrata 125 cm^2.



816. U kvadratu stranice 1 cm nalazi se devet tačaka. Dokazati da postoje tri tačke koje su sadržane u krugu poluprečnika 0,4 cm.

817. Zbir osnovne ivice i visine pravilne šestostrane prizme je 10 cm. Odrediti površinu i zapreminu te prizme, ako je duža dijagonala prizme najmanja moguća.

Republičko takmičenje 2012.

VIII razred

818. U trouglu ABC mjerni brojevi dužina stranica su prirodni brojevi, a najkraća stranica je 2 cm. Izračunati površinu trougla ABC, ako je $h_c=h_a+h_b$.

819. Centar upisane kružnice u jednakokrakom trouglu ABC dijeli dužinu visine iz tačke C na 5 cm i 3 cm, računajući od tjemena C. Odrediti dužine stranica trougla ABC.

820. Odrediti sve prirodne brojeve n za koje je n^3+3 djeljiv sa $n+3$.

821. Dat je pravilan šestougao $ABCDEF$ čija je dužina stranice 1 cm. Ako se prave AB i CD sijeku u tački K, odrediti dužinu duži EK.

822. Odrediti uređene parove (p,q) prostih brojeva za koje su p^2+q i $p+q^2$ takođe prosti brojevi.

IX razred

823. Data je pravilna n-tostrana piramida visine H. Odrediti rastojanje od vrha piramide, na kome treba postaviti paralelni presjek, koji dijeli piramidu na dva dijela jednakih zapremina.

824. Ako za stranice trougla ABC važi jednakost $a=\frac{b+c}{3}$ dokazati da je a najmanja stranica tog trougla.

825. Ako je $\frac{x}{y+z+t}=\frac{y}{z+t+x}=\frac{z}{t+x+y}=\frac{t}{x+y+z}$, izračunati vrijednost izraza

$$\frac{x+y}{z+t}+\frac{y+z}{t+x}+\frac{z+t}{x+y}+\frac{t+x}{z+t}$$

826. Dokazati nejednakost $\frac{a}{bc}+\frac{b}{ca}+\frac{c}{ab}\geq\frac{2}{a}+\frac{2}{b}+\frac{2}{c}$, gdje su a, b, c pozitivni realni brojevi. Kada važi jednakost?

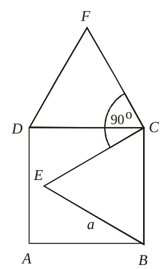
827. U ravni su date 3 horizontalne i 7 vertikalnih pravih. Njihove presječne tačke su obojena plavom ili crvenom bojom. Dokazati da postoje četiri tačke iste boje koja su tjemena pravougaonika.

Opštinsko takmičenje 2013.

VIII razred

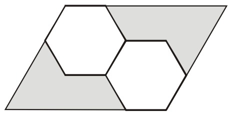
828. Tri utorka u mjesecu su sa parnim datumima. Kog dana je 21. dan u mjesecu?

829. Četverougao $ABCD$ na slici je kvadrat površine 8 cm^2, a trouglovi BCE i CDF su jednakostranični. Kolika je dužina duži EF?



830. Odrediti nepoznatu cifru jedinica broja $\overline{401512a}$, tako da ostaci dijeljenja ovog broja sa 3 i 5 budu jednaki.

831. Na slici u paralelogramu, prikazana su dva podudarna šestougla. Koji dio paralelograma je šrafiran?



832. Na kraku BC jednakokrakog trougla ABC sa osnovicom AB, data je tačka D tako da je $\sphericalangle ADC=120^{\circ}$, $\sphericalangle CAD=50^{\circ}$. Odrediti $\sphericalangle DAB$.

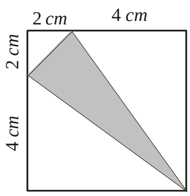
IX razred

833. Koji dio kvadrata na slici je šrafiran?

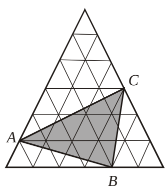
834. Razlomak $\frac{9}{91}$ predstaviti kao razliku dvaju pravih razlomaka čiji su imenioci 7 i 13.

835. Jednakostraničan trougao na slici ima površinu 36 cm^2. Kolika je površina trougla ABC?

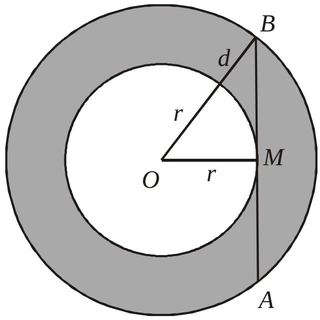
836. Tetiva AB je tangenta manjeg kruga. Kolika je površina osjenčenog prstena ako je AB=16 cm?



Zad. 833.



Zad. 835.



Zad. 836.

837. Za svaki svoj rođendan, Ružica je dobijala onoliko ruža koliko je godina punila. Ona suši i čuva sve ruže i sada ih ima 120. Koji je zadnji rođendan proslavila Ružica?

Regionalno takmičenje 2013.

VIII razred

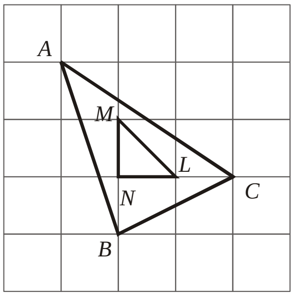
838. Riješiti jednačinu u skupu cijelih brojeva: $xy + x - 3y - 6 = 0$.

839. Ako su šestocifrenom broju prva i četvrta cifra jednake, redom, drugoj i petoj, odnosno trećoj i šestoj cifri, dokazati da je taj broj djeljiv sa 7, 11 i 13.

840. Učenik je u toku 19 dana riješio 73 zadatka. Svakog od prvih 11 dana riješio je po n zadataka, a svakog od preostalih dana po m zadataka. Po koliko zadataka je učenik riješavao u prvih 11 dana, a po koliko u posljednih 8 dana?

841. Odrediti površinu trapeze $ABCD$ ako je AB=11 cm, BC=5 cm, CD=7 cm i AD=3 cm.

842. U kvadratnoj mreži smještena su dva trougla ABC i MNL kao na slici. Odrediti omjer površina tih trouglova.



IX razred

843. Ako je $9x^2 + 4y^2 - 12xy - 16a^2 = 12$ i $3x - 2y + 4a = 4$, koliko je $3x - 2y$?

844. Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$.

845. Odrediti sve četverocifrene brojeve $\overline{abba}$ djeljive sa 45.

846. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC date su tačke M i N tako da je AC=AN, BC=BM. Dokazati da je $\measuredangle MCN=45^{\circ}$.

847. U trouglu ABC uglovi pri tjemenima B i C su 40°. Stranica AB je produžena preko tjemena B do tačke D tako da je AD=BC. Odrediti uglove trougla ADC.

Republičko takmičenje 2013.

VIII razred

848. Za svaki realni broj x važi nejednakost $3(1+x^2+x^4)^4 \geq (1+x+x^2)^2$. Dokazati.

849. Poznato je da je broj n jednak zbiru kvadrata tri prirodna broja. Dokazati da je i broj n^2 takođe zbir kvadrata tri prirodna broja.

850. Na hipotenuzi AB pravouglog trougla ABC izabrana je tačka K takva da je CK=CB, Pri tome duž AB polovi simetralu AL ugla $\sphericalangle BAC$. Odrediti uglove ΔABC.

851. U ravni je dato 100 tačaka od kojih nikoje tri ne leže na istoj pravoj. Dokazati da postoje manje od 10000 jednakokrakih trouglova sa tjemenima u tim tačkama.

852. Broj a ima 2013 različitih djelilaca. Da li on može biti potpun kub?

IX razred

853. Naći sva cjelobrojna rješenja jednačine $3xy+2y=7$.

854. U trougao ABC sa pravim uglom u tjemenu C upisna je kružnica koja dodiruje stranice BC, CA i AB, redom, u tačkama K, M i N. Neka normala kroz tačku K na duž MN siječe katetu AC u tački P. Dokazati da je $CK=AP$.

855. Neka važi $\{ a, b, c, d \}=\{2011, 2013, 2015, 2017\}$. Odrediti maksimalnu i minimalnu vrijednost izraza $ab+bc+cd+da$.

856. Odrediti uglove pravouglog trougla u kome prava koja spaja centre opisane i upisane kružnice siječe hipotenuzu pod uglom od 45°.

857. Na fudbalskom turniru na kome je učestvovalo pet ekipa, svaka od ekipa odigrala je međusobno po jednu utakmicu. Na kraju turnira četiri ekipe su redom osvojile 1, 2, 5 i 8 bodova. Koliko je bodova osvojila peta ekipa? (Svaka ekipa za pobjedu dobija 3 boda, a za neriješen rezultat 1 bod i za poraz 0 bodova.)

Opštinsko takmičenje 2014.

VIII razred

858. Dužina veće osnovice jednakokrakog trapeza je 44 cm, a kraka 17 cm i dijagonale 39 cm. Izračunaj površinu trapeze.

859. Postoje li uzastopni prirodni brojevi a, b, i c takvi da je $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{53}{60}$?

860. U unutrašnjosti pravougaonika $ABCD$ data je tačka P. Ako je PA=7 cm, PB=2 cm i PC=6 cm, kolika je udaljenost PD?

861. Izračunati sve cjelobrojne vrijednosti izraza $\frac{n^3-n^2+3}{n-1}$, $n \in Z$.

862. Na jednom ostrvu $\frac{3}{4}$ svih muškaraca je oženjeno, a $\frac{3}{5}$ svih žena je udano. Koji dio stanovništva nije u braku?

IX razred

863. Odrediti zapreminu kvadra čija su rastojanja od tačke presjeka dijagonala do ivica kvadra jednaka 7 cm, 8 cm i 9 cm.

864. Ako je x realan broj, različit od nule, takav da je $x+\frac{1}{x}=3$, izračunati

$$x^4+\frac{1}{x^4}.$$

865. Prosjek uspjeha učenika u jednom razredu, koji ima 35 učenika, iznosi 2,8. Ako izostavimo jednog učenika, tada je prosjek 2,78. Koliki je uspjeh izostavljenog učenika?

866. Koliki ugao zatvaraju mala i velika kazaljka na satu u 5 sati i 12 minuta?

867. U skupu cijelih brojeva riješiti jednačinu $xy+y-3x=8$.

Regionalno takmičenje 2014.

VIII razred

868. U pravougli trougao ABC upisan je kvadrat, tako da mu dvije stranice leže na katetama, a četvrto tjeme pripada hipotenuzi. Koji dio površine trougla, u procentima zauzima kvadrat, ako je jedna kateta 50% duža od druge katete?

869.Odredi x, y i z ako je: $\frac{51}{19}=2+\frac{1}{x+\frac{1}{y+\frac{1}{z}}}$.

870. Neka je $ABCD$ proizvoljan četverougao površine 3. Na stranici AB date su tačke M i N takve da je $AM=MN=NB$, a na stranici CD tačke P i Q takve da je $CP=PQ=QD$. Dokazati da četverougao ima površinu 1.

871. Neki trocifreni broj se poveća za 45, ako cifre jedinica i desetica zamjene mjesta. Isti broj se smanji za 270, ako cifre stotica i desetica zamijene mjesta. Šta će se desiti s tim brojem ako cifre stotica i jedinica zamijene mjesta?

872. Marko je otvorio vodu nad kadom, ali je zaboravio kadu začepiti. Marko se čepa sjetio poslije 48 minuta. Da li je Marko presuo kadu ako se zna da se prazna kada napuni za 20 minuta, kad je začepljena, a puna isprazni za 30 minuta.

IX razred

873.Odrediti trocifreni broj za koji je količnik tog broja i zbira njegovih cifara namjanji moguć.

874. Poluprečnik baze (osnove) pravog valjka povećan je 200%, a visina valjka je smanjena za p%. Ako se zapremina tog valjka povećala za p%, odrediti da li se površina omotača povećala ili smanjila i za koliko procenata.

875. Brojevi 12 i 60 imaju osobinu da im je proizvod jednak desetostrukom zbiru. Takvih parova prirodnih brojeva ima još. Odredi sve te parove brojeva.

876. U trouglu ABC dato je a=20, b=15 i $\alpha-\beta=90^{\circ}$. Kolika je dužina stranice $c=AB$?

877. Koliki je zbir svih četverocifrenih brojeva, sa različitim ciframa, koji se mogu napisati pomoću cifara 1, 2, 3, 4 ili 5?

Republičko takmičenje 2014.

VIII razred

878. Odrediti sve parove prirodnih brojeva x i y za koje važi $xy+x+y=2014$.

879. a) Da li se prirodni brojevi od 1 do 16 mogu ispisati po kružnici tako da zbir svaka dva susjedna broja bude kvadrat nekog prirodnog broja?

b) Da li se prirodni brojevi od 1 do 16 mogu ispisati u vrstu tako da zbir svaka dva susjedna broja bude kvadrat nekog prirodnog broja?

880. Dat je ΔABC kod koga je unutrašnji ugao kod tjemena B dva puta veći od unutrašnjeg ugla kod tjemena A. Ako težišna duž iz tjemena C siječe simetralu unutrašnjeg ugla kod tjemena B pod pravim uglom i ako je BC=3, odrediti obim ΔABC.

881. Ako su a, b, c dužine stranica trougla, dokazati da je

$$(b^2+c^2-a^2)^2<4b^2c^2$$

882. Dokazati da je broj $2013^{2014}-2013$ djeljiv sa 66.

IX razred

883. Neka su K i L, redom, sredine stranica CD i AD kvadrata $ABCD$, a S presječna tačka duži BK i CL. Dokazati da je ΔASB jednakokrak.

884. Odrediti sve trocifrene prirodne brojeve koji su 15 puta veći od zbira njegovih cifara.

885. Odrediti vrijednost izraza $a^6+a^3b^3+b^6$, ako realni brojevi a, b, c zadovolja-vaju jednakosti $a^2+ab+b^2=4$ i $a^4+a^2b^2+b^4=8$.

886. Tri jednaka traktora obrađuju dva polja različitih površina. Ako sva tri traktora najprije preoru prvo polje, a zatim dva od njih preoru i drugo, posao ukupno traje 12 časova. Ako sva tri traktora završe polovinu ukupnog posla, a drugu polovinu obavi jedan traktor, ukupno je potrebno 20 časova. Za koliko časova mogu dva traktora preorati prvo polje?

887. Dužine stranica trougla su tri uzastopna prirodna broja, ne manja od 3. Dokazati da visina trougla konstruisana na srednju po veličini stranicu dijeli tu stranicu na dijelove čija je razlika 4.

Opštinsko takmičenje 2015.

VIII razred

888. Riješiti jednačinu: $\sqrt{x^2-4x+1}-\sqrt{x^2+12x+9}=-1$.

889. Dato je 2015 proizvoljnih prirodnih brojeva. Dokazati da se među njima mogu izabrati dva broja čija je razlika djeljiva sa 2014.

890. Izračunati uglove i obim jednakokrakog trapeza ako je krak 6 cm, dijagonala dijeli srednju liniju na odsječke 4 cm i 7 cm i kraća osnovica je dva puta duža od jednog odsječka srednje linije.

891. Ako je $x^2+y^2+2x-6y+10=0$, izračunaj vrijednost izraza

$$x^{2015}+(y-2)^{2015}.$$

892. Majka je rodila kćerku sa 26 godina. Sa koliko je godina rodila sina ako on danas ima 8 godina, a svi zajedno danas imaju 60 godina?

IX razred

893. Riješiti nejednačinu: $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 3 - x$.

894. Kojom se cifrom završava broj: A = $1 + 2 + 2^2 + 2^3 + ... + 2^{2014} + 2^{2015}$?

895. U kocki sira ivice 13 *dm* nalazi se 2015 crva. Da li se od date kocke sira može isjeći kocka sira ivice 1 *dm* u kojoj nema nijednog crva ? Crv je kraći od 1 *cm.*

896. Kroz tjeme A paralelograma $ABCD$ konstruisana je prava p koja dijagonalu BD siječe u tački E, pravu CD u tački K, a stranicu BC u tački F. Dokazati da je

$AE = \sqrt{EF \cdot EK}$, (AE, EF i EK su dužine tih duži).

897. Da li postoje prirodni brojevi p i q takvi da je $p^2 - q^2 = 330$?

Regionalno takmičenje 2015.

VIII razred

898. Od 100 izabranih brojeva postoje bar 2 broja čija je razlika djeljiva i sa 9 i sa 11. Dokazati.

899. Visina jednakokrakog trapeza jednaka je h, a njegova površina iznosi h^2. Pod kojim uglom se sijeku dijagonale tog trapeza?

900. Dokazati da je broj $2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015 + 1$, potpun kvadrat, ne računajući njegovu vrijednost.

901. Za niz brojeva $a_1, a_2, a_3, ... , a_{n-1}, a_n$ kažemo da je aritmetički niz ako je razlika svaka dva uzastopna člana uvijek isti broj d, tj.

$$a_n = a_{n-1} + d = ... = a_1 + (n-1)\, d.$$

Označimo sa $S_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{n-1} + a_n$ (zbir prvih n članova tog niza).

a) Dokazati da je $S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n) = \frac{n}{2}(2a_1 + (n-1)d)$.

b) Koristeći a) izračunati vrijednost izraza:

$$2015^2 - 2014^2 + 2013^2 - 2012^2 + ... + 5^2 - 4^2 + 3^2 - 2^2 + 1.$$

902. Poslije sniženja od 20% za iznos od 24 KM može se kupiti 1 metar platna više nego što se moglo kupiti za 26 KM. Kolika je bila cijena tog platna prije sniženja, a kolika poslije sniženja?

IX razred

903. Prava koja sadrži tjeme A trougla ABC siječe stranicu BC u tački M, tako da je $BM : CM = 2014 : 2015$. Težišna duž CC_1 siječe pravu AM u tački S. Odrediti odnos duži CS i SC_1.

904. Da li se kocka ivice 13 *cm* može isjeći na 2015 manjih kocki čije su ivice 1 *cm*, 2 *cm* ili 3 *cm* (tako da u toj podjeli ima svih tih kocki)?

905. U konveksnom četverouglu $ABCD$ tačke M i N su sredine suprotnih stranica AB i CD, redom. Neka se duži MD i AN sijeku u tački P, a duži MC i BN u tački Q. Dokazati da je površina četverougla $MQNP$ jednaka zbiru površina trouglova APD i BCQ.

906. Dekadni zapis prirodnog broja sadrži 2015 jedinica i 2015 dvojki, ostale cifre su nule. Dokazati da dati broj nije kvadrat prirodnog broja.

907. U kutiiji se nalazi 2013 crvenih, 2014 plavih i 2015 bijelih kuglica. Koliko najmanje kuglica se mora uzeti iz kutije (bez gledanja) da bi među njima bilo sigurno tri kuglice: a) iste boje; b) različitih boja.

Republičko takmičenje 2015.

VIII razred

908. Dvadeset učenika radilo je test. Kada je test pregledan, ispostavilo se da nikoja dva učenika nisu imala jednak broj tačnih odgovora na postavljena pitanja i da je svako pitanje odgovoreno od strane najviše tri učenika. Dokazati da je na ovom testu bilo više od 63 pitanja.

909. Prirodni brojevi od 1 do 30 000, ispisani su redom jedan za drugim, tako da je dobijen broj 123456789101112...30000. Koliko se puta cifre 2, 0, 1, 5 (sa tim redoslijedom), pojavljuju kao uzastopne u tom broju?

910. U trouglu ABC simetrala ugla ABC siječe simetralu ugla BCA u tački D. Prava BD, siječe po drugi put krug opisan oko trougla ABC u tački E. Dokazati da je tačka E centar opisanog kruga trougla ACD.

911. Naći sve proste brojeve p i q ($p<q$), takvo da važi

$$p(2q+1)+q(2p+1)=2(p^2+q^2)$$

912. Neka su a, b i c realni brojevi različiti od nule tako da važi :

$$S=a+\frac{1}{a}=b+\frac{1}{c}=c+\frac{1}{a}$$

Dokazati da je $S=-abc$.

IX razred

913. Na svakom kilometru puta od mjesta A do mjesta B, postavljen je stub sa tablom. Na jednoj strani table piše udaljenost od mjesta A, a sa druge strane udaljenost do mjesta B (udaljenost je izražena cijelim brojem kilometara). Zbir cifara na svakom stubu je 13. Kolika je razdaljina između mjesta A i B?

914. Naći sve parove prirodnih brojeva m i n, tako da je:

$$(m^2+1)(n^2+1)+45=2(2m+1)(3n+1).$$

915. U trouglu ABC simetrale uglova A i B sijeku krug opisan oko tog trougla u tačkama D i E, redom. Neka je $AD\cap BE=\{I\}$, $DE\cap BC=\{P\}$ i $DE\cap AC=\{M\}$.

Dokazati da je četverougao $IPCM$ romb.

916. Neka su AB i BC susjedne stranice pravilnog devetougla, tačka L središte luka BC, a tačka M središte duži AB, tačka N središte duži OL, gdje je O centar opisanog kruga oko tog trougla. Dokazati da je $\sphericalangle OMN=30°$.

917. Neka su a, b, c pozitivni realni brojevi. Dokazati nejednakost:

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}}+\sqrt{\frac{bc}{bc+a(a+b+c)}}+\sqrt{\frac{ca}{ca+b(a+b+c)}}\leq\frac{3}{2}$$

Opštinsko takmičenje 2016.

VII razred

918. Odrediti sve četverocifrene brojeve manje od 3000 takve da im je proizvod cifara 105.

919. U jednom odjeljenju sa 32 učenika samo Petar je na pismenoj provjeri napravio 10 grešaka, a svi ostali učenici manje od njega. Dokaži da u tom odjeljenju postoje bar 4 učenika sa istim brojem grešaka.

920. Naći sve proste brojeve p takve da je p^2+7 takođe prost broj.

921. Odrediti sve trocifrene brojeve zapisane pomoću cifara 1, 3, 5 i 0 (cifre se ne mogu ponavljati) koji su djeljivi sa 15.

922. Dokazati da je ugao koji grade simetrale unutrašnjeg ugla β i spoljašnjeg ugla γ_1 u trouglu ABC jednak polovini unutrašnjeg ugla α.

VIII razred

923. Odrediti najmanje prirodne brojeve m i n takve da je $m^3=540\cdot n$.

924. Odrediti sve četverocifrene prirodne brojeve zapisane pomoću cifara 1, 2, 3, 5 i 8 (cifre se ne mogu ponavljati) koji su djeljivi sa 12.

925. Dokazati da je $\frac{2}{3}<\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\ldots+\frac{1}{150}<2$.

926. Dat je konveksni četverougao $ABCD$. Tačke M i P su sredine stranica AB i CD, redom. Odrediti odnos površina četverouglova $ABCD$ i $MBPD$.

927. Zbir dva broja je 2016. Koji su to brojevi ako je 3,5% jednog broja jednako 17,5% drugog broja.

IX razred

928. Uporediti izraze 303^{404} i 404^{303}.

929. Na pismenoj provjeri za svaki tačno riješen zadatak dobija se 4 boda, a za netačne ili neriješene gubi se 3 boda. Da je učenik riješio 2 zadatka više procenat tačno urađenih zadataka bi bio 80%. Ako je učenik imao 38 bodova, izračunati koliko je to tačno riješenih zadataka u procentima.

930. Ako je p prost broj, onda je $p^{2016}+2015\cdot p$ složen broj. Dokazati.

931. Riješiti nejednačinu $\sqrt{4x^2-12x+9}<x$.

932. Površina kvadra je 98 cm^2, a površine dvaju strana kvadra su 15 cm^2 i 24 cm^2. Odrediti zapreminu tog kvadra.

Regionalno takmičenje 2016.

VII razred

933. Naći trocifreni broj $\overline{abc}$ ako je četverocifreni broj $\overline{abc1}$ tri puta veći od četverocifrenog broja $\overline{2abc}$.

934. Dat je skup A={5, 9, 4, 6, 1, 10, 7}. Ana za svaki dvočlani podskup skupa A na tabli zapisuje veći broj. Odrediti zbir brojeva koje je Ana zapisala na tabli.

935. Neka je težišna duž AA_1 trougla ABC normalna na simetralu ugla ABC tog trougla. Mjerni brojevi dužina stranica ΔABC su uzastopni prirodni brojevi. Koliki su mjerni brojevi dužina stranica tog trougla?

936. Za koji prost broj p je vrijednost razlomka $A=\frac{2p-24}{13-p}$ cijeli broj. Kolika je ta cjelobrojna vrijednost.

937. Na tabli su napisani brojevi 3, 4, 5, ... , 2015, 2016. Dozvoljeno je u jednom koraku bilo koja dva broja uvećati za po jedan., Da li se, poslije izvjesnog broja koraka, mogu dobiti svi jednaki brojevi? Odgovor detaljno obrazložiti.

VIII razred

938. Odrediti prirodne brojeve a i b takve da broj $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}$ bude racionalan.

939. Neka su x, y i z realni brojevi, takvi da je $x^2+y^2+z^2=8$ i $xy+yz+zx=4$. Izračunati vrijednost izraza $|x|+|y|+|z|$.

940. Dokazati da je za svaki prirodan broj n izraz n^5-5n^3+4n djeljiv sa 120.

941. Boris i Aleksa igraju igru brojanja koja se sastoji u tome da počinju brojati od broja 1 i naizmjenično broje govoreći najviše 4 broja. (Na primjer, Aleksa broji prvi i izbroji 1, 2, 3 onda Boris nastavlja 4, 5, 6, 7, zatim Aleksa 8, 9, pa Boris 10 itd.). Gubitnik je onaj igrač koji prvi izgovori broj 2016. Ako Aleksa započinje brojanje koji od igrača ima pobjedničku strategiju. Odgovor detaljno obrazložiti.

942. Dat je konveksan četverougao $ABCD$. Neka je tačka M sredina stranice AB, a tačka N sredina stranice CD. Dokazati da je $AD+BC\geq 2\cdot MN$. Kakav je četverougao ako važi jednakost?

IX razred

943. U trouglu ABC, tačka D je sredina stranice BC, a tačka E na stranici AB takva da je $AE=2\cdot EB$. Ako je $\measuredangle ADC=\measuredangle BDE$, odrediti $\measuredangle ACB$.

944. Odrediti sve prirodne brojeve n takve da je broj $2^n + n^2$ djeljiv sa 7.

945. Dokazati da je za svako $a>1$, $b>1$: $\dfrac{a^2}{b-1}+\dfrac{b^2}{a-1}\geq 8$.

946. Da li se u krug poluprečnika 1 cm može smjestiti izvjestan broj krugova, tako da nikoja dva od njih nemaju zajedničku unutrašnju tačku i da im je zbir poluprečnika jednak 2016 cm? (Odgovor obrazložiti).

947. Odrediti sve prirodne brojeve x i y takve da je $x^2 + 1 = y^2 + 2016$.

Republičko takmičenje 2016.

VIII razred

948. Ako je $a^2+b^2=(a+b-c)^2$, dokazati da je $\dfrac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\dfrac{a-c}{b-c}$.

949. Od kocke ivice a odsječene su trostrane piramide tako da svaka strana kocke postane pravilan osmougao. Odrediti zapreminu tako dobijenog poliedra.

950. Dat je oštrougli trougao ABC ($AB<AC$). Neka je K krug opisan oko tog trougla. Prava koja sadrži tačku A i normalna je na pravu BC siječe po drugi put krug K u tački P. Neka je X tačka na duži AC i neka je Q presjek prave BX i kruga K. Ako je $BX=CX$, dokazati da je PQ prečnik kruga K.

951. Dokazati da za svaki realan broj a važi nejednakost $a^4+41>7a^2+10a$.

952. Na gomili se nalazi 2016 žetona. Aleksandar i Bojan igraju sljedeću igru: igrači u svakom potezu, naizmjenično uzimaju 1, 2 ili 3 žetona sa gomile, a pobjednik je igrač koji uzme posljednji žeton. Igru započinje Aleksandar. Koji igrač može sebi da osigura pobjedu, bez obzira na to kako igra protivnik?

IX razred

953. Osnova piramide je jednakokraki trapez osnovica a=5 cm, b=3 cm i kraka c=7 cm. Visina piramide prolazi kroz presjek dijagonala osnove. Ako je duža bočna ivica s = 10 cm, izračunati zapreminu piramide.

954. Odrediti sve dvocifrene brojeve koji se mogu prikazati kao zbir kuba cifre desetica i kvadrata cifre jedinica.

955. Dijagonale AC i BD jednakokrakog trapeza $ABCD$ osnovica AB i CD, sijeku se u tački O tako da je ugao AOB jednak 60^{O}. Ako su P, Q i R središta duži OA, OD i BC redom, dokazati da je trougao PQR jednakostraničan.

956. Ako za pozitivne realne brojeve a, b i c važi $a+b+c=1$, dokazati da je

$$\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}+\sqrt{4c+1}<5.$$

957. Princ Jovan je odlučio da za rođendan pozove $2n$ gostiju, od kojih je tačno n muškaraca i n žena. Princ Jovan želi da goste postavi za okrugli sto tako da ni pored kojeg gosta ne sjede dvije žene. Da li je to moguće za:

a) n = 2016; b) n = 2017?

Opštinsko takmičenje 2017.

VII razred

958. Kojom cifrom se završava proizvod $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot \dots \cdot 9$ (2017 devetki).

959. Za prirodne brojeve a, b i c važi da su veći od 1 i da je bar jedan od njih paran. Ako je $a+1=2b+2=3c+3$, naći najmanju vrijednost proizvoda $a \cdot b \cdot c$.

960. Neka je $ABCD$ kvadrat, E tačka u njegovoj unutrašnjosti takvi da je $\sphericalangle EDC = 75^0$, $\sphericalangle DCE = 30^0$. Dokaži da je $BE = AB$.

961. U jednom gradu živi 70 000 stanovnika i svi redovno posjećuju zubare. Zubari su utvrdili da bar 2100 stanovnika u gradu ima isti broj zuba. Da li su oni u pravu?

962. Jedan radnik može da završi neki posao za 15 dana, a drugi radnik isti posao može da završi za 18 dana. Ako se prvom i drugom radniku pridruži treći radnik, sva trojica zajedno završiće taj posao za 7,5 dana. Za koliko vremena bi treći radnik sam završio ovaj posao?

VIII razred

963. Ako je $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = \sqrt{18}$, izračunaj vrijednost izraza $\frac{\sqrt{3} \cdot x}{3} - \frac{y}{\sqrt{3}}$.

964. Ako je $a+b=3$, $a \cdot b=2$ dokazati da je $a^4+b^4+2000=2017$.

965. Oko jednakokrakog trapeza čije su osnovice $a = 16\ cm$ i $b = 12\ cm$, a visina jednaka srednjoj liniji, opisan je krug. Za koliko je površina kruga veća od površine trapeza?

966. Ako su a i b katete, a h hipotenuzina visina, onda je $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$. Dokazati.

967. Naći proste trocifrene brojeve čiji je proizvod cifara 252.

IX razred

968. Laza je ušao u knjižaru da kupi knjigu čija cijena iznosi pet šestina od sume koju je imao kod sebe. Tada sazna da je ta knjiga pojeftinila za 40%. Laza kupi knjigu, časti prodavca jednu marku i ostane mu 14 maraka. Koliko je novca Laza ponio?

969. Neka je $f(x+\frac{1}{x}) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2017$. Odrediti $f(1)$, $f(2)$ i $f(x)$.

970. U trouglu su date stranice a=4 cm i b=5 cm i, a ugao između njih je 30^0. Odrediti poluprečnik kruga upisanog u dati trougao.

971. Odredi rastojanje tjemena od dijagonale kocke. Dijagonala ne sadrži to tjeme, a dužina ivice kocke je $a\ cm$.

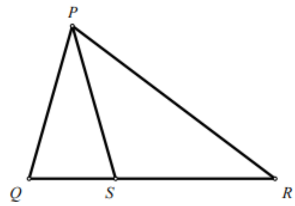
972. Da li postoji četverocifreni broj koji se poveća 4 puta kada se njegove cifre napišu obrnutim redom? Odgovor obrazloži.

Regionalno takmičenje 2017.

VII razred

973. Učenici sjede u učionicama u parovima. U razredu je više djevojčica, četiri petine ukupnog broja učenika sjedi u mješovitim parovima (dječak + djevojčica), a tri para su isključivo ženska. Koliko je dječaka, a koliko djevojčica u tom razredu?

974. U trouglu QRP, slika, vrijedi: $|PQ| = |PS| = |RS|$ i $\sphericalangle QPS = 12^{\circ}$. Kolika je veličina ugla $\sphericalangle QPR$?



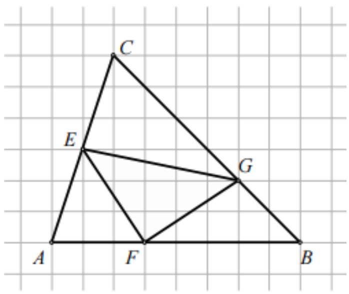
975. Jednom kosilicom moguće je za 2 sata pokositi 2,5 hektara livade, a drugom, manjom pokosi se za 1 sat i 30 minuta1,25 hektara. Koliku će površinu livade zajedno pokositi obje kosilice za 3 sata i 36 minuta?

976. Dužine stranica jednakokrakog trougla izražene su prirodnim brojevima (u centrimetrima). Proizvod dužina svih stranica tog trougla uvećan za 1 iznosi 2017. Koliki je obim tog trougla?

977. Članovi matematičke sekcije u jednoj školi dogovorili su se da za vrijeme raspusta svaki od njih napiše po jednu razglednicu ostalim članovima. Koliko je bilo članova u toj sekciji ako je napisano 342 razglednice?

VIII razred

978. Izračunaj površinu trougla EFG, sa slike, ako je površina „kvadratića" u mreži 10 cm^2.



979. Dvije jabuke su teške kao tri kruške, a tri jabuke su teške kao četiri pomorandže. Osim toga, šest krušaka košta koliko i pet pomorandži. Šta je skuplje: kilogram krušaka ili kilogram pomorandži?

980. Odrediti koliko ima četverocifrenih brojeva koj se zapisuju pomoću cifara 1, 2 i 3, ali tako da se nijedna od tih cifara ne pojavljuje više od dva puta u zapisu broja.

981. Hipotenuze BC i AD pravouglih trouglova ABC i ABD sijeku se u tački E. Ako je dužina duži AC jednaka 6 cm, a dužina duži BD jedaka 3 cm, izračunati rastojanje tačake E od duži AB.

982. Je li moguće stranice knjige označiti s tačno 2017 cifara? Obrazloži svoj zaključak.

IX razred

983. U proizvoljnom trapezu $ABCD$ osnovica DC je dva puta kraća od osnovice AB. Iz tjemna B povučena je normala BE na AD. Dokaži da je CE=CB.

984. Data je jednačina $8(x+5)+3(y-12)=2017$. Neka su (x_1, y_1), (x_2, y_2) ,⋯, (x_n, y_n) parovi prirodnih brojeva koji zadovoljavaju datu jednačinu. Izračunati $x_1+x_2+\ldots+x_n$.

985. Za jednim automobilom, koji je krenuo iz mjesta A, poslije pola sata krene drugi automobil i stigne ga nakon dva sta vožnje. Nastavljajući vožnju u istom smjeru brži automobil je nakon sat i po bio 24 kilometra ispred sporijeg. Odrediti srednje brzine tih automobila.

986. Dat je krug $k(O, r)$ i tačka A, tako da je OA=2r. Izračunati dužinu kružnog luka koji se vidi iz tačke A.

987. Proizvod jednog dvocifrenog i jednog trocifrenog broja zapisuje se u dekadnom sistemu samo pooću nekoliko dvojki (sve cifre su dvojke). Koj su to brojevi?

Republičko takmičenje 2017.

VIII razred

988. Odrediti trocifreni broj $\overline{abc}$, ako dvocifreni broj $\overline{ac}$ jednak 12% broja $\overline{abc}$.

989. U ravni je dato 5 crvenih i 4 plave tačke tako da bilo koje tri nisu na jednoj pravoj. Koliko ima trouglova sa tjemenima u datim tačkama tako da sva tri tjemena nisu iste boje?

990. Na stranici BC trougla ABC data je tačka M, tako da su trouglovi ABM i AMC jednakokraki. Izračunati uglove trougla ABC ako je $\sphericalangle CAB$=75^0.

991. Prirodan broj m jednak je kvadratu prirodnog broja n, a njegova cifra desetica je neparna. Koja cifra mora stajati na mjestu jedinica broja m?

992. Koliko ima parova uređenih brojeva (m, n) takvih da je $|m|+|n|<2017$?

IX razred

993. Dokazati da je od 100 prirodnih brojeva uvijek moguće izabrati 15 takvih da je razlika bilo koja dva od njih djeljiva sa 7.

994. Nad stranicama pravouglog trougla konstruisani su spolja (u spoljašnjoj oblasti) jednakostranični trouglovi. Za njih važi da je zbir površina trouglova nad hipotenuzom i nad kraćom katetom jednak zbiru površina trougla nad dužom katetom i datog pravouglog trougla. Izračunaj razmjeru dužina hipotenuze i kraće katete.

995. Na šahovskom turniru koji se igra po sistemu „svako sa svakim" dvojica šahista odigrali su samo po tri partije i potom napustili turnir, a da nisu igrali međusobno. Na turniru je odigrano ukupno 84 partije. Koliko šahista je započelo turnir?

996. Neka je C tjeme pravouglog trougla ABC. Dokazati da između dužina težišnih duži $t_a,\ t_b,\ t_c$ važi odnos: $t_a^2 + t_b^2 = 5t_c^2$.

997. Niz brojeva $a_1, a_2, a_3, \cdots$ zadan je sa prva dva člana $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ i uslovom $a_{k+2} = \frac{a_{k+1}}{a_k}$, $(k = 1, 2, 3, \cdots)$. Naći a_{2017}.

Opštinsko takmičenje 2018.

VII razred

998. U skupu cijelih brojeva riješi jednačinu

$$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 360.$$

999. U kutiji se nalazi 10 crvenih, 20 plavih, 30 zelenih i 40 žutih kuglica. Kuglice izvlačimo u mraku. Koliko kuglica najmanje moramo izvući da bismo bili sigurni da je među njima:

a) bar 4 kuglice iste boje;

b) po jedna kuglica svake boje;

c) ne manje od 6 plavih kuglica;

d) bar 5 žutih kuglica?

1000. Neka je M tačka u trouglu ABC. Dokazati da je:

a) $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$; b) $AM + BM < AC + BC$.

1001. Unutar konveksnog četverougla naći tačku čiji je zbir rastojanja do tjemena tog četverougla najmanji.

1002. Sa koliko nula se završava proizvod prvih sto prirodnih brojeva

$$1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100\ ?$$

VIII razred

1003. Dokaži da je $\sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6 + \sqrt{6}}}} < 3$.

1004. Dajana je pročitala knjigu za 4 dana. Drugi dan je pročitala 20% više nego prvi dan, ali je i svaki slijedeći dan pročitala 20% više nego prethodni dan. Koliko stranica ima knjiga, ako je zbir stranica koje je dajana pročitala prvi i četvrti dan za 11 veći od zbira stranica koje je pročitala drugi i treći dan?

1005. Dužine kateta pravouglog trougla ABC su a i b. Simetrala prasvog ugla kod tjemena C siječe hipotenuzu u tački D. Izračunaj dužinu stranice CD.

1006. Neka je $a = 2^{2018} - 2^{2017} + 2^{2016}$, $b = 2^{2017} - 2^{2018} + 2^{2019}$,

$c = \sqrt{3} \cdot (2^{2016} + 2^{2017})$.

Dokazati da je zbir kvadrata neka dva od brojeva a, b, c jednak kvadratu trećeg.

1007. Hipotenuza pravouglog trougla i težišna duž t koja koja joj odgovara grade ugao od 60^0. Izrazi obim i površinu trougla u funkciji od t.

IX razred

1008. Jedna brigada može da završi jedan posao za 10, a druga za 15 dana. Na tom poslu angažovana je trećina prve i jedan dio druge brigade, pa je posao završen za 12 dana. Koji dio druge brigade, u procentima, je angažovan?

1009. Neka je dat jednakokraki trougao čija je osnovica $AB = a$ jednaka odgovarajućoj visini h_a. Izračunati poluprečnik kruga opisanog oko tog trougla u funkciji od a.

1010. Pravilan četverostrani rogalj ima stane od 60^0. Ako je S vrh i A, B, C, D redom tačke ivica tog roglja, takvi da je $SA = SB = SC = SD$, izračunaj uglove triedra sa vrhom A.

1011. Odredi cijele brojeve x, y, z za koje je ispunjena jednakost

$$x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z = 17.$$

1012. Dokaži da je zbir kvadrata pet uzastopnih prirodnih brojeva djeljiv brojem 5, ali nije djeljiv brojem 25.

Regionalno takmičenje 2018.

VII razred

1013. Ako su a i b prosti brojevi veći od 3 i $a > b$, dokazati da je proizvod $(a + b) \cdot (a - b)$ djeljiv brojem 12.

1014. Prodavac ima šest galona zapremine 7, 9, 13, 14, 15 i 16 litara. Neki od njih su napunjeni sokom od borovnice, neki sokom od jabuke, a samo jedan galon je prazan. Ukupna zapremina soka od borovnice je dva puta manja od ukupne zapremine soka od jabuke. Odredi sadržaj svakog galona. Obrazloži odgovor.

1015. Odrediti cifre a i b ($a \neq b$) tako da broj $0,\overline{ababab\ldots}$ bude jednak nesvodljivom razlomku kod koga je zbir imenioca i brojioca jednak 17.

1016. Dat je jednakokraki trougao ABC. Simetrala spoljašnjg ugla na osnovici AB i simetrala spoljašnjeg ugla naspram osnovice sijeku se pod uglom od 71^{o}. Odrediti unutrašnje uglove trougla ABC.

1017. U trouglu ABC zadani su uglovi $\sphericalangle BAC = 40^{\text{o}}$ i $\sphericalangle ABC = 20^{\text{o}}$, a razlika dužina stranica $AB = c$ i $BC = a$ je $10\ cm$, ($AB - BC = c - a = 10\ cm$). Ako simetrala ugla $\sphericalangle ACB$ siječe stranicu ABu tački M, odredi dužinu duži CM.

VIII razred

1018. Anđeli je 20% više godina nego što je imao Jovan kada je Anđela imala onoliko godina koliko sada ima Jovan. Kada Jovan bude imao godina koliko Anđela ima sada, zajedno će imati 150 godina. Koliko godina ima Anđela, a koliko Jovan?

1019. Zadan je pravilni mnogougao $A_1A_2A_3 \cdots A_N$ kod koga je spoljašnji ugao 9 puta manji od unutrašnjeg ugla. Izračunaj veličinu ugla između dijagonala A_1A_3 i A_1A_4.

1020. Dat je paralelogram $ABCD$ površine S. Presjek njihovih dijagonala označen je sa O. Na stranici CD označena je tačka M. Presjek duži AM i dijagonale BD je tačka E, a presjek duži BM i dijagonale AC je tačka F. Zbir površina trouglova AED i BCF je $\frac{1}{3}S$. Kolika je površina četverougla $EOFM$?

1021. Ako dvocifreni broj podijelimo zbirom njegovih cifara, količnik je 6 i ostatak 2. Akoisti broj podijelimo proizvodom njegovih cifara, količnik je 5 i ostatak 2. Koji je to dvocifreni broj?

1022. Sumu od 480 KM podijeliti određenom brojulica. Ako se troje od njih odrekne svog dijela, svaka od preostalih osoba dobija 8 KM više. Koliko je osoba kojima je trebalo podijeliti navedeni iznos novca.

IX razred

1023. Odredi sve prirodne brojeve a takve da je broj $\sqrt{\frac{a+64}{a-64}}$ takođe prirodan broj.

1024. Zadane su dvije koncentrične kružnice k_1 i k_2. Dužine poluprečnika tih kružnica se odnose kao $3 : 1$. Duž AC je poluprečnik kružnice k_1. Duž BC je tetiva velike kružnice k_1 i u jedno tangenta manje kružnice k_2. Ako je $AB = 8\ cm$ kolika je površina trougla ABC?

1025. Na jednoj od dvije paralelne prave nalazi se 8 tačaka. Koliko je tačaka na drugoj pravoj ako sve tačke zajedno određuju 640 uglova?

1026. Ako je $a^2 + a + 1 = 0$ koliko je $a^{2018} + \frac{1}{a^{2018}}$?

1027. Dat je pravougli trougao ABC čije su katete $a = 15\ cm$ i $b = 20\ cm$. U taj trougao upisan je krug, a u njega je upisan trougao $A_1B_1C_1$ sličan datom trouglu ABC. Koliki su obim i površina trougla $A_1B_1C_1$?

Republičko takmičenje 2018.

VIII razred

1028. Odrediti brojeve a, b, c, d koji ispunjavaju uslove:

$$a : b = 2 : 3, a : d = 3 : 5, b : c = 6{:}\,5, 2d - a - c = 26.$$

1029. U trouglu ABC, u kome je $AB = 4$ i $BC = 3$ težišne duži AM i CN se sijeku pod pravim uglom. Izračunati dužinu stranice AC.

1030. Odrediti sve parove (p, q) prostih brojeva z ako važi $p^2 - 17q^2 = 16$.

1031. Neka je P presječna tačka dijagonala AC i BD konveksnog četverougla $ABCD$. Neka je X ortocentar trougla PAB, a Y ortocentar trougla PCD. Pretpostavimo da X leži unutar trougla PAB, da Y leži unutar trougla PCD i da je P središte duži XY. Dokazati da je $ABCD$ paralelogram.

1032. Na šahovskom turniru su učestvovala dva učenika osmog razreda i n učenika devetog razreda . Dva učenika osmog razreda su zajedno osvojila 6 poena, a svi učenici devetog razreda su osvojili podjednak broj poena. Odrediti sve vrijednosti n.(Na šahovskom turniru svaka dva igrača odigraju međusobno po jednu partiju. Igrač za pobjedu dobija 1 poen, za remi 0,5 poena i za poraz 0 poena.)

IX razred

1033. Na turniru u vaterpolu na kome je učestvovalo 12 ekipa su sve ekipe imale različit broj osvojenih bodova. Dokazati da je posljednja ekipa na tabeli osvojila najviše dvije pobjede. (Na turniru u vaterpolu svake dvije ekipe odigraju međusobno po jednu utakmicu. Ekipa za pobjedu dobija 2 boda, za neriješen rezultat 1 bod i za poraz 9 bodova.)

1034. Brojevi a, b, c zadovoljavaju uslove $a^2 + 2 = b^4$, $b^2 + 2 = c^4$, $c^2 + 2 = a^4$. Odrediti vrijednost izraza $(a^2 - 1)\ (b^2 - 1)(c^2 - 1)$.

1035. Dokazati da je broj $7^{2n} - 48n - 1$ djeljiv sa 9 za sve prirodne brojeve n.

1036. Neka je M središte stranice BC oštrouglog trougla ABC ineka je D podnožje visine iz tjemena B u tom trouglu. Prava koja sadrži tačku M i normalna je na AM siječe pravu DB utački K. Ako je $\sphericalangle MAC = 30^0$, dokazati da je $AK = BC$.

1037. Akoje $(a + b)(c + d) = 2$, $(a + c)(b + d) = 3$ i $(a + d)(b + c) = 4$, dokazati da je $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geq 7$.

Opštinsko takmičenje 2019.

VII razred

1038. Uporedi veličine x i $\frac{1}{x}$, ako je x racionalan broj različit od nule.

1039. Odredi uglove trougla ako je $\alpha = \frac{3}{5}\beta = 0{,}3\gamma$.

1040. U broju $199a7b$ odrediti cifre a i b tako da dobijemo broj dijeljiv sa 12. Napiši te brojeve.

1041. Ako je u trouglu ABC razlika uglova $\alpha - \beta = 90^{O}$ ($\measuredangle BAC = \alpha$, a $\measuredangle ABC = \beta$) tada su odsječci simetrala spoljašnjeg i unutrašnjeg ugla kod tjemena C, od tjemena C do presjeka tih simetrala, M i N, sa pravom AB podudarni (tj. $CM = CN$). Dokazati.

1042. Odredi zbir i proizvod svih rješenja nejednačine $|x-1|+1 < 2019$ u skupu cijelih brojeva.

VIII razred

1043. Koliko cifara ima broj $4^{16} \cdot 5^{25}$?.

1044. Odredi najmanji četverocifreni broj koji je djeljiv sa 9 i čiji je proizvod cifara 180.

1045. U jednoj kutiji ima više od 500, a manje od 1000 čokoladnih bombona koje treba rasporediti u jednake bomonjere. Pri pokušaju sa manjim pakovanjima od 4, 5, 6 i 7 bombona, svaki put je ostala jedna bombona viška. Koliko najmanje bombona treba da sadrži svaka od jednakih bombonjera i koliko ima takvih bombonjera da bi sve bombone bile upotrebljene? (U svakoj bombonjeri je više od jedne bombone.)

1046. U trouglu ABC je $\sphericalangle ABC = \alpha = 84^{0}$. Stranicu AB produžimo preko tačke A do tačke M tako da je $AM = AC$ i preko tačke B do tačke N tako da je $BN = BC$. Ako je $\sphericalangle BNC = 26^{0}$ izračunaj mjeru $\sphericalangle MCN$,

1047. Dat je kvadrat stranice 4 cm i u njemu je razmješteno na proizvoljan način 35 tačaka. Dokaži da postoji kvadrat stranice 1 cm kome pripadaju bar tri date tačke.

IX razred

1048. Da li postoji prirodan broj x tako da važi $x^{2020} = x^{2019} + 2019$. Obrazloži odgovor.

1049. Nađi četiri prirodna broja, među kojima može biti i jednakih, čiji je proizvod jednak njihovom zbiru.

1050. Na Oljinom rođendanu svi su se rukovali sa Oljom i sa ostalim gostima. Njen momak, zagriženi matematičar, izbrojao je sva rukovanja i konstatovao da ih je bilo 136. Kasnije nije mogao da se sjeti koliko je Olja imala gostiju, ali je zapamtio broj rukovanja i na osnovu toga izračunao broj gostiju. Koliko je bilo gostiju na Oljinom rođendanu?

1051. U jednakokrakom trapezu $ABCD$ osnovica AB jednako je duga kao i dijagonala AC, koja je ujedno i simetrala $\measuredangle BAD$. Izračunaj uglove tog trapeza.

1052. Pravougli trougao ABC sa pravim uglom kod tjemena C naklonjen je katetom $AC = 4\ cm$ na ravan π (AC pripada ravni π) i gradi sa tom ravni ugao od 45^{O}. Hipotenuza AB se odnosi prema drugoj kateti BC kao $3:1$. Odredi rastojanje tjemena B od ravni π.

Regionalno takmičenje 2019.

VII razred

1053. Koliko ima prirodnih brojeva većih od 2000 i manjih od 5000 koje možemo napisati pomoću cifara $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ ako se
a) cifre mogu ponavljati,
b) cifre ne smiju ponavljati.

1054. Obim pravougaonika $ABCD$ je $66\ cm$. Tačka E je središte stranice AB . Obim trougla EBC je $36\ cm$, a obim četverougla $ECDA$ je $60\ cm$. Kolika je površina trougla EBC?

1055. Odredi prirodne brojeve $a_1, a_2, a_3, \cdots, a_n$ tako da je:

$$a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot a_3 \cdot \cdots \cdot a_n = 2019.$$

Koliko ukupno ima tih brojeva?

1056. Ako je $\frac{a+b}{b} = 2{,}2$ koliko je $\frac{a-b}{a}$?

1057. Jovan je obojio ogradu oko svog imanja na sljedeći način. Preko vikenda je obojio $12\ m$ više od tri osmine dužine ograde. Uponedjeljak je obojio $3\ m$ više od četvrtine ukupne dužine ograde, a u utorak trećinu dužine koju je obojio preko vikenda i u ponedjeljak. U srijedu je obojio preostali dio koji je iznosio tačno jednu četvrtinu ukupne dužine ograde. Koliko je matara duga ograda oko Jovanovog imanja?

VIII razred

1058. Igor, Jovan i Todor imaju zajedno $12\ 000\ KM$. Igor polovinu svog novca podijeli na dva jednaka dijela i da ih Jovanu i Todoru, a drugu polovinu zadrži za sebe. Isto tako uradi i Jovan, a zatim i Todor, poslije čega sva trojica prijatelja imaju jednak iznos novca. Koliko je novca imao svaki od njih na početku? Obrazloži odgovor.

1059. Osnovice jednakokrakog trapeza su $9\ cm$ i $1\ cm$, a krak mu je za $2\ cm$ duži od visine. Izračunati:
a) dužinu dijagonale trapeza,
b) rastojanje između središta dijagonala.

1060. Odredi sve cijele brojeve n za koje je vrijednost izraza $\frac{n^2+2n-8}{n^2-4}$ cijeli broj

1061. Kojim brojem treba završiti niz brojeva $1, -2, 3, -4, 5, -6, \cdots$ da bi im zbir bio jednak 2019?

1062. Broj stranica jednog pravilnog mnogougla je dva puta veći od broja stranica drugog pravilnog mnogougla. Ako je veličina unutrašnjeg ugla jednog od tih mnogouglova za 10^{0} manja od veličine unutrašnjeg ugla drugog od tih mnogouglova, izračunaj veličine unutrašnjih uglova tih mnogouglova.

IX razred

1063. Izračunati

$$(1^2+2^2+3^2+\cdots+2019^2)-(1\cdot 3+2\cdot 4+3\cdot 5+\cdots+2018\cdot 2020).$$

1064. Tačka u kojoj kružnica upisana u pravougli trougao dodiruje hipotenuzu dijeli hipotenuzu na dijelova 4 cm i 7 cm. Odredi površinu tog trougla.

1065. Za koji cijeli broj m $S=$broj $\frac{1+2+3+\cdots+2019+m}{1+2+3+\cdots+2018+m}$ biti najmanji prirodan broj?

1066. Jovan i Marko, radeći zajedno, zadani posao mogu završiti za 36 minuta. Ako Jovan radi sam, treba mu 30 minuta više da završi posao nego kad Marko radi sam. Koliko treba Jovanu da sam završi taj posao?

1067. Odredi parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi $x\cdot y-7x-y=3$.

Republičko takmičenje 2019.

VIII razred

1068. Prirodni broj n pri dijeljenju sa 3 daje ostatak a, pri dijeljenju sa 6 daje ostatak b, a pri dijeljenju sa 9 daje ostatak c. Ako je $a+b+c=15$ odredi ostatak pri dijeljenju broja n sa 18.

1069. Na matematičkom takmičenju učestvovalo je 2019 učenika. Dokaži da se među njima može izabrati 45 učenika takvih da su ili svi iz istog grada ili svi iz različitih gradova.

1070. Dat je kvadrat $ABCD$. U spoljašnjosti kvadrata konstruisane su polukružnice k_1 i k_2 nad prečnicima AB i BC, redom. Prava kroz tjeme B siječe k_1 u tački M, a k_2 u tački N. Dokaži da su duži CM i DN normalne.

1071. Neka su a, b i c prirodni brojevi koji su dužine stranica trougla u centimetrima. Jedna visina tog trougla jednaka je zbiru druge dvije. Dokaži da je $a^2+b^2+c^2$ kvadrat nekog prirodnog broja.

1072. Odredi proste brojeve p, q, r, s i t takve da je $p\cdot\ q\cdot\ r\cdot(s\cdot t)=2010$. Brojevi ne moraju svi biti međusobno različiti.

IX razred

1073. Dokazati da je $S=2+2^2+2^3+2^4+\cdots+2^{2310}$ djeljiv sa $3, 7, 31$ i 127.

1074. Dat je jednakokraki pravougli trougao ABC sa hipotenuzom $AB=2a$. Sa iste strane ravni ABC date su tačke D i E, takve da su duži $AD=x$ i $BE=y$ normalne na ravan ABC Izraziti u funkciji od a dužine x i y, ako se zna da je $\measuredangle CED$ prav i da je zapremina tijela $ABCDE$ jednaka šestini zapremine kocke ivice AB. Zatim izračunati površinu tijela $ABCDE$

1075. Koliko ima uređenih parova cijelih brojeva (a, b) takvih da je

$$|a| + |b| < 2019?$$

1076. Izračunati zbir svih petocifrenih brojeva čije su sve cifre različite i uzimaju vrijednosti iz skupa $\{1, 2, 3, 4, 5\}$.

1077. U zapisu 2019-cifrenog prirodnog broja pojavljuju se samo cifre 5 i 8. Dokaži da se izostavljanjem samo jedne cifre može dobiti 2018-cifreni broj djeljiv sa 11.

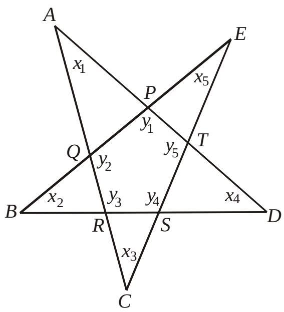
RJEŠENJA ZADATAKA

1. Razlomak je je prirodan broj ako $3n - 4 \in \{1, 2, 3, 6, 8, 12, 24\}$, pa je $n = 2$ ili $n = 4$.

2. Datu nejednakost možemo napisati $\frac{45}{60} < \frac{10n+30}{60} < \frac{84}{60}$. Ona je tačna ako je $45 < 10n + 30 < 84$, tj. $45 < 10n + 30$ i $10n + 30 < 84$, odnosno $15 < 10n$ i $10n < 54$, tj. $15 < 10n < 54$, što je tačno za $n \in \{2,3,4,5\}$.

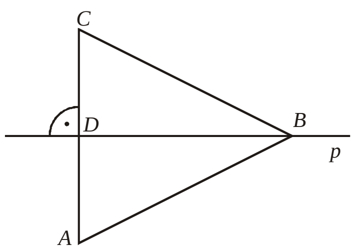
3. Poslije prvog vraćanja ostalo je $\frac{3}{4}$ duga, a poslije drugog $\frac{3}{4} - \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{4} = \frac{5}{12}$ duga. Neka je x ukupan dug. Tada je, prema uslovima zadatka, $\frac{5}{12}x - 640 = \frac{3}{20}x$, pa je $x = 2400$. Branko je dugovao Marku 2400 dinara.

4. Koristeći oznake na sl. 1. važi: $x_1 + x_3 + y_5 = 180^{\text{O}}$ $(\triangle ACT)$; $x_2 + x_4 + y_1 = 180^{\text{O}}$, $(\triangle BDP)$; $x_3 + x_5 + y_2 = 180^{\text{O}}$, $(\triangle CEQ)$; $x_3 + x_1 + y_3 = 180^{\text{O}}$, $(\triangle DAR)$; $x_5 + x_2 + y_4 = 180^{\text{O}}$, $(\triangle EBS)$. Saberimo ove jednakosti:
$2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5) + (y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5) = 900^{\text{O}}$. Kako je $y_1 + y_2 + y_3 + y_4 + y_5 = 540^{\text{O}}$ (zbir unutrašnjih uglova petougla $PQRST$), slijedi $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 180^{\text{O}}$.



Sl. 1

5. Neka je ABC traženi trougao, sl. 2. Prema uslovima zadatka ($\triangle ABC$ je jednakokrak (uglovi na osnovici su 75^{O}), tačka A je osnosimetrična tački C u odnosu na pravu p.



Sl. 2

Konstrukcija:
1. Konstruišemo normalu CD na pravu p.
2. Na pravoj CD odredimo tačku A tako da je $CD = AD$.
3. Konstruišemo uglove na osnovici AC jednakokrakog trougla ABC tako da je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle CAB = 75^{\circ}$.

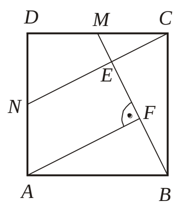
6. Kako je $ab = 1$, to važi $a^2b = a$, $ab^2 = b$ i slijedi:

$$a^2b - b + ab^2 - a = a - b + b - a = 0$$

7. $A = \frac{1\cdot2\cdot4+2\cdot4\cdot8+3\cdot6\cdot12+\cdots+100\cdot200\cdot400}{1\cdot3\cdot9+2\cdot6\cdot18+3\cdot9\cdot27+\cdots+100\cdot300\cdot900}$; $A = \frac{(1\cdot2\cdot4)+2^3\cdot(1\cdot2\cdot4)+3^3\cdot(1\cdot2\cdot4)+\cdots+100^3\cdot(1\cdot2\cdot4)}{(1\cdot3\cdot9)+2^3\cdot(1\cdot3\cdot9)+3^3\cdot(1\cdot3\cdot9)+\cdots+100^3\cdot(1\cdot3\cdot9)}$;

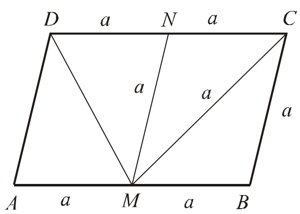
$A = \frac{(1\cdot2\cdot4)(1+2^3+3^3+\cdots+100^3)}{(1\cdot3\cdot9)(1+2^3+3^3+\cdots+100^3)} = \frac{1\cdot2\cdot4}{1\cdot3\cdot9} = \frac{8}{27}$.

8. a) Prema uslovima zadatka, sl. 3, pravougli trouglovi BCM i CDNsu podudarni pa je $\sphericalangle BMC = \sphericalangle CND$. Trouglovi CND i CEM su slični, jer je $\sphericalangle C$ njihov zajednički ugao i $\sphericalangle$EMC = $\sphericalangle$CND, pa je i $\sphericalangle$CEM = $\sphericalangle CDN = 90^{\circ}$, tj. $BM \perp CN$.
b) Neka je AF visina trougla ABE. Tada je $\sphericalangle$BAF = $\sphericalangle CBE$ (uglovi sa normalnim kracima), pa su trouglovi ABF i BCE podudarni ($AB = BC$). Zbog toga je $CE = BF$. Trougovi BCE i BCM su slični, pa iz $BE{:}CE = BC{:}CM = 2 : 1$ slijedi $BE = 2CE$, odnosno $BE = 2BF$. Dakle, podnožje visine iz A je središte stranice BE trougla ABE i slijedi da je $\triangle ABE$ jednakokraki te važi $AB = AE$.



Sl. 3

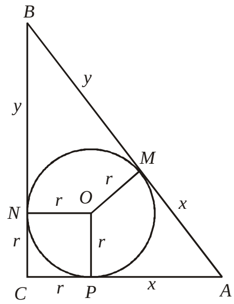
9. Neka je N središte stranice DC sl. 4. Tada je MN težišna duž trougla CMD i važi $MN = DN = NC$, pa je $\triangle CMD$ pravougli, tj. $\sphericalangle CMD = 90^0$.



Sl. 4

10. Neka je ABC pravougli trougao sa katetama $BC = a,\ AC = b,$ hipotenuzom $AB = c$ i r poluprečnikom upisanog kruga, sl. 5. Trouglovi OMA i OPA, sa zajedničkom stranicom OA, su podudarni ($\sphericalangle OMA = \sphericalangle OPA = 90^0,\ OM = OP = r$).

Slijedi da je $AM = AP = x$. Slično dokažemo da je $BM = BN = y$. Kako je četverougao $CPON$ kvadrat stranice r to važi $r = b - y$ i $r = a - x$. Sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo $2r = a + b - (x + y)$, tj. $r = \frac{a+b-c}{2}$.



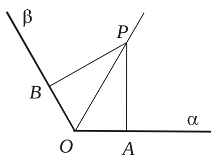
Sl. 5

11. Izraz $n^5 - 5n^3 + 4n$ možeмо pisati: $n^5 - 5n^3 + 4n = n(n^4 - 5n^2 + 4) = n \cdot (n^2 \cdot (n^2 - 1) - 4 \cdot (n^2 - 1) = n \cdot (n^2 - 1) \cdot (n^2 - 4) = (n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$. Ako je n prirodan broj, onda je $(n-2) \cdot (n-1) \cdot n \cdot (n+1) \cdot (n+2)$ proizvod pet uzastopnih cijelih brojeva i jedan je sigurno djeljiv sa 5 i bar jedan djeljiv sa 3. Takođe, bar dva od tih brojeva su uzastopni parni brojevi, pa je jedan od njih djeljiv sa 4 i njihov proizvod je djeljiv sa 8. Dakle, dati broj je djeljiv sa $5 \cdot 3 \cdot 8 = 120$, jer su brojevi $3, 5, 8$ uzajamno prosti.

12. Iz prve jednačine je $a = \frac{9x-1}{x}$, $a \neq 0$, $x \neq 0$. Rješenje druge jednačine je $a = 5$. Jednačine su ekvivalentne, ako imaju isti skup rješenja, tj. ako je $\frac{9x-1}{x} = 5$; odnosno $x = \frac{1}{4}$.

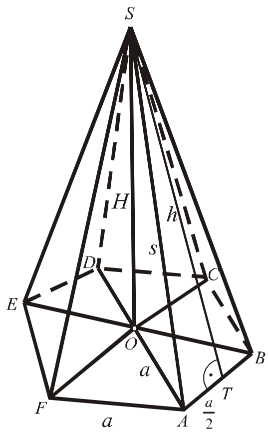
13. Ako jedan radnik završi sav posao za x dana, a drugi za y dana, onda će oni za jedan dan završiti $\frac{1}{12}$ posla i važi $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$. Dalje, iz datih uslova slijedi $\frac{5}{12} + 17{,}8 \cdot \frac{1}{y} = 1$, pa je $y = 30$ dana. Iz jednačine $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$ dobijamo x=20 dana.

14. Prema uslovima zadatka, tačka P je jednako udaljena od ravni α i β, sl. 6. Kako je $\sphericalangle AOB = 120^0$, to je $\sphericalangle AOP = 60^0$. Trougao AOP je pravougli sa oštrim uglovima 30^0 i 60^0, te je $PA = \frac{8\sqrt{3}}{3} OP$; $OP = \frac{2}{\sqrt{3}} PA$, odnosno $OP = \frac{2\sqrt{3}}{3} PA$. Kako je, prema uslovima zadatka $PA = 4\ cm$, to je $OP = \frac{8\sqrt{3}}{3}\ cm$.



Sl. 6

15. Prema uslovima zadatka je $B : M = \sqrt{3} : 2$, gdje je B baza, a M omotač pravilne šestostrane piramide, pa je $B = 6 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ i $M = 6 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$, sl. 7. Za $a = 10\ cm$, dobijamo $B = 150\sqrt{3}\ cm^2$. Iz jednakosti $B : M = \sqrt{3} : 2$ slijedi $M = \frac{2B}{\sqrt{3}}$, tj. $M = 300\ cm^2$. Iz $M = 6 \cdot \frac{a \cdot h}{2}$, gdje je h visina bočne strane pravilne šestostrane piramide, dobijamo $h = 10\ cm$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na trougao SAT:
$s^2 = h^2 + \left(\frac{h}{2}\right)^2$ i na trougao AOS: $H^2 = s^2 - a^2 = 125 - 100 = 25$; $H = 5\ cm$.



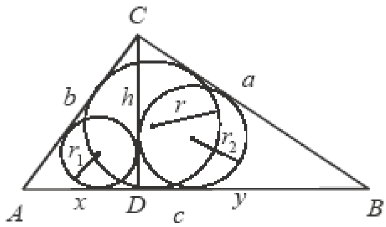
Sl. 7

16. Transformisanjem izraza A i B dobijamo $A = -8a$ i $B = 12\,b$, odnosno, zbog $a = 2\frac{1}{2}$ i $b = -1\frac{1}{4}$, $A = -20$ i $B = -15$, pa je $A : B = (-20) : (-15) = 4 : 3$.

17. Izraz $\left(\frac{3}{5}a - b\right)^2 + 1$ ima najmanju vrijednost za $\frac{3}{5}a - b = 0$, tj. $b = \frac{3}{5}a$. Dakle, broj b je prirodan ako je a djeljiv sa 5, tj. ako $a \in \{5,10,15,20,25,30\}$, pa slijedi $b \in \{3,6,9,12,15,18\}$, pa su rješenja uređeni parovi: (5,3), (10,6), (15,9), (20,12), (25,15), (30,18).

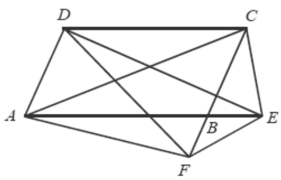
18. Kako je $n^3 + 1994n = n^3 - n + 1995n = (n-1) \cdot n \cdot (n+1) + 1955$, to je $(n-1) \cdot n \cdot (n+1)$ proizvod tri uzastopna prirodna broja pa je djeljiv sa 3. Takođe, broj 1955je djeljiv sa 3 pa je sa 3 djeljiv i broj $1995n$. Dakle, broj $n^3 + 1994n$ je djeljiv sa 3. Ako je n paran broj, tada je $n^3 + 1994n$, takođe paran, pa je djeljiv i sa 2. Dakle, $n^3 + 1994n$ je djeljiv i sa 6.

19. Neka je $h = CD$ i $x = AD$, $y = DB$, $x + y = AB$ i neka su, redom, r, r_1, r_2 poluprečnici krugova upisanih u trouglove ABC, ADC, BCD, sl. 8. Prema zadatku **10.** i podacima na slici je: $r = \frac{1}{2}(a + b - c)$, $r_1 = \frac{1}{2}(x + h - b)$, $r_2 = \frac{1}{2}(y + h - a)$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo: $r + r_1 + r_2 = \frac{1}{2}(x + y - c + 2h)$. Kako je $x + y = c$, to je $r + r_1 + r_2 = h$.



Sl. 8

20. Dokažimo da su trouglovi AFD i DCE podudarni. Iz uslova slijedi $AF = DC = AB$ i $CE = AD = BC$, sl. 9. Dalje, iz $AD \parallel CF$ i $AF = DC$ slijedi da je $AFCD$ jednakokraki trapez te su mu dijagonale jednake; $AD = DF$. Iz $AE \parallel DC$ i $CE = AD$ zaključujemo da je $AECD$ jednakokraki trapez i takođe važi $AE = DE$. Iz $AC = DF$ i $AC = DE$ slijedi $DF = DE$. Dakle, $\triangle DEF$ je jednakokraki.



Sl. 9

21. Rješenje jednačine je $x = 2 - \frac{n}{9}$ će biti prirodan broj ako je $n = 9$, pa je $x = 1$.

22. Transformišimo dati broj:

$2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + \cdots + 2^{99} + 2^{100} = (2 + 2^2) + (2^3 + 2^4) + \cdots + (2^{99} + 2^{100}) =$
$2 \cdot (1 + 2) + 2^3 \cdot (1 + 2) + \cdots + 2^{99} \cdot (1 + 2) + 2^{100} \cdot (1 + 2)$

$= 3 \cdot (2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{99})$. On je očigledno djeljiv sa 3.

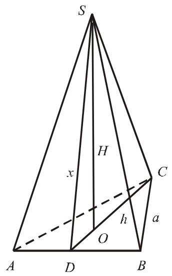
23. Kako je $x \neq 1$, to je nejednačina ekvivalentna sa nejednačinom $\frac{-5x+8}{3(x-1)} > 0$, pa je:

$$(1)\quad \begin{matrix} -5x + 8 > 0 \\ 3(x-1) > 0 \end{matrix} \qquad \text{ili} \qquad (2)\quad \begin{matrix} -5x + 8 < 0 \\ 3(x - 1 < 0. \end{matrix}$$

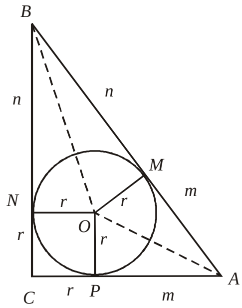
Rješenje sistema nejednačina (1) je, $1 < x < \frac{5}{8}$, dok sistem nejednačina (2) nema rješenja. Dakle, rješenje date nejednačine je $1 < x < \frac{5}{8}$.

24. Primijenom Pitagorine teoreme na $\triangle OSD$ (sl. 10.) slijedi $x^2 = H^2 + \left(\frac{1}{3}h\right)^2$, gdje je $h = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pa dobijamo, $x^2 = \frac{49a^2}{12}$; tj. $x = \frac{7a\sqrt{3}}{6}$. Iz $B + M = 648\sqrt{3}$ slijedi $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 3 \cdot \frac{ax}{2} = 648\sqrt{3}$; $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{7a^2\sqrt{3}}{4} = 648\sqrt{3}$. Odavde dobijamo $a = 18\,cm$, te je $H = 18\,cm$.

Zapremina piramide je $V=\frac{H}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=972\sqrt{3}\ cm^3$.



Sl. 10



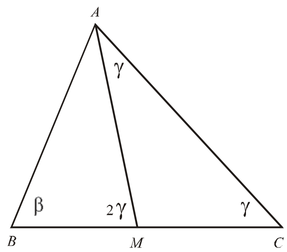
Sl. 11

25. Neka je $AB=c$, $BC=a$ i $AC=b$, sl. 11. Tada je $P=\frac{ab}{2}$, tj.
$2P=ab=(n+r)(m+r)=mn+r(m+n+r)=mn+\frac{a+b-c}{2}\cdot\frac{a+b+c}{2}=mn+\frac{(a+b)^2-c^2}{4}=mn+\frac{2ab}{4}=mn+\frac{ab}{2}=mn+P$. Kako je $2P=mn+P$, to je $P=mn$.

26. Kako je $a+b+c\leq 27$, to iz jednakosti $328-\overline{abc}=a+b+b$ slijedi $3-a=0$, tj. $a=3$ pa je $11b+2c=25$, odakle je $b=1$ i $c=7$. Traženi broj je 317.

27. Kvadriranjem jednakosti $a+b+c=0$ dobijamo $(a+b+c)^2=0$, tj.
$a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca)=0$; $a^2+b^2+c^2=-2(ab+bc+ca)$. Kvadriranjem posljednje jednakosti dobijamo $(a^2+b^2+c^2)^2=(-2(ab+bc+ca))^2$
$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8(a^2bc+b^2ac+c^2ab)=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)+8abc(a+b+c)$. Kako je $a+b+c=0$, to je
$(a^2+b^2+c^2)^2=4(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. (1)
Takođe, važi $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)$. Koristeći (1) dobijamo $(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+\frac{1}{2}(a^2+b^2+c^2)$; $(a^2+b^2+c^2)^2=2(a^4+b^4+c^4)$.

28. Jedan od trouglova ABM i AMC je tupougli, sl. 12. Neka je to $\triangle\ AMC$ sa tupim uglom AMC, tada je $AM=MC$ ($\triangle\ AMC$ je jednakokraki). Prema uslovu zadatka i $\triangle\ ABM$ je jednakokraki, pa važi $AB=AM$ ili $AB=BM$ ili $MA=MB$.



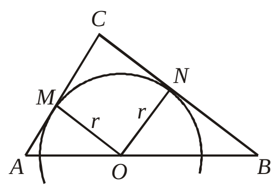
Sl. 12

1) Neka je $AB = AM$ i $AM = MC$. Tada je $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = \gamma$, pa je $\sphericalangle BMA = 2\gamma$ (spoljašnji ugao ($\triangle AMC$). Iz jednakokrakog $\triangle ABM$ slijedi $\beta = 2\gamma$, pa iz $\triangle ABC$ slijedi $\beta + \gamma + 75^0 = 180^0$, odnosno $2\gamma + \gamma + 75^0 = 180^0$, tj. $\gamma = 35^0$. Dakle, uglovi $\triangle ABC$ su 75^0, 70^0 i 35^0.

2) Neka je $BA = BM$ i $AM = MC$. Iz jednakokrakog $\triangle ABM$ slijedi $\sphericalangle BAM = 2\gamma$. Dalje je $\sphericalangle BAM + \sphericalangle MAC = 75^0$, $2\gamma + \gamma = 75^0$, $\gamma = 25^0$. Iz $\triangle ABC$ dobijamo da je $\beta + \gamma + 75^0 = 180^0$, pa je $\beta = 80^0$. Dakle, uglovi $\triangle ABC$ su 75^0, 80^0 i 25^0.

3) Neka je $MA = MB$ i $AM = MC$. Tada je $\sphericalangle CAB = 90^0$. Kontradikcija.

29. Neka dati krug dodiruje katete trougla u tačkama M i N, sl. 13. Četvorougao $MONC$ je kvadrat stranice 3 cm. Iz $\triangle ONB$ slijedi $NB^2 = OB^2 - r^2$; $NB = 4\ cm$, pa je $BC = 7\ cm$. Trouglovi ABC i OBN su slični, pa iz $AC: ON = BC: NB$ slijedi $AC: 3 = 7: 4$, tj. $AC = \frac{21}{4}\ cm$. Površina $\triangle ABC$: $P = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{147}{8}\ cm^2$.

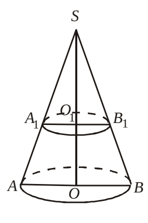


Sl. 13

30. Dati izraz možemo napisati $a(a-1) = b(b-1) = c(c-1)$, odakle zaključujemo da je $a > 1, b < a$ i $c < a$. Brojevi $2, 6, 12, 20, 30, 42, 56$ i 72 su svi brojevi koji su proizvod dva uzastopna prirodna broja manja od 10. Lako provjerimo da se samo dva broja u ovom nizu mogu predstaviti kao zbir dva pret-hodna. To su brojevi 72 i 42, jer je $9 \cdot 8 = 7 \cdot 6 + 5 \cdot 4$. Traženi brojevi su 976, 967, 764 i 746.

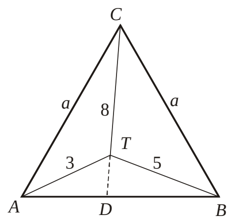
31. Transformišimo dati izraz:
$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + 10 = \big((x-1)(x-4)\big) + 10 = (x^2 - 5x + 4)(x^2 - 5x + 5) + 10 = \big((x^2 - 5x + 5) - 1\big)\big((x^2 - 5x + 5) + 1\big) + 10 = (x^2 - 5x + 5)^2 - 1^2 + 10 = (x^2 - 5x + 5)^2 + 9$.

32. Uvedimo oznake $OS = H$, $O_1S = x$, $SB = s$, $SB_1 = s_1$, $OB = R$ i $O_1B_1 = r$ (sl. 14.). Iz uslova zadatka imao $R\pi s = 2r\pi s_1$ (1). Iz sličnosti trouglova OSB i O_1B_1S slijedi $SB: SB_1 = OB: O_1B_1$, odnosno $s: s_1 = R: r$. (2). Iz (1) i (2) dobijamo $2r = R = R: r$ ili $\left(\frac{r}{R}\right)^2 = \frac{1}{2}$, tj. $\frac{r}{R} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Dalje, iz $SO: SO_1 = OB: O_1B_1$, slijedi $H: x = R: r$, tj. $x = \frac{r}{R}H$, pa je $x = 1\ cm$.

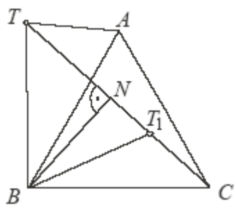


Sl. 14

33. Neka je a stranica jednakostraničnog $\triangle ABC$. a) Pretpostavimo da tačka T pripada unutrašnjosti $\triangle ABC$, sl. 15. Tada u $\triangle ADC$ važi $a = AC > CD > CT = 8\ cm$, a iz $\triangle ABT$, $AB < AT + BT$, tj. $a < 3\ cm + 5\ cm = 8\ cm$. Kontradikcija.
Neka tačka T pripada stranici trougla, npr. $T \equiv D$. Tada iz tupouglog trougla ADC dobijamo $a > CT = 8\ cm$, a iz „trougla" ABT slijedi $a = AT + BT = 8\ cm$. Ponovo je kontradikcija. Prema tome tačka T je izvan $\triangle ABT$.
b) Za tačku T, koja ispunjava uslove zadatka, konstruišimo $\triangle BCT_1$ podudaran $\triangle BAT$, sl. 16, tako da je $BT_1 = 5\ cm$ i $CT_1 = 3\ cm$. Tada je $BT = BT_1$ i



Sl. 15



Sl. 16

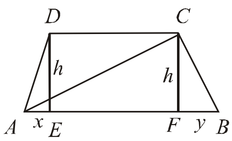
$\sphericalangle T_1BT = 60^0$. Dakle, $\triangle BT_1T$ je jednakostraničan, pa je $TT_1 = 5\ cm$. Budući da je $CT_1 + TT_1 = 3\ cm + 5\ cm = CT$, tačke C, T i T_1 su kolinearne. Neka je BN visina jednakostraničnog $\triangle BT_1T$. Kako je $TT_1 = 5\ cm$ to je $TN = NT_1 = \frac{5}{2}\ cm$ i $BN = \frac{TT_1\sqrt{3}}{2} = \frac{5\sqrt{3}}{2}\ cm$.Tada je $NC = NT_1 + T_1C = \frac{5}{2}\ cm + 3\ cm = \frac{11}{2}\ cm$. Iz $\triangle BNC$ slijedi $BC^2 = BN^2 + CN^2$; $a^2 = BN^2 + CN^2 = 49$; $a = 7\ cm$.

34. $A = a^2 + d^2 - 2b(a + c - b) + 2c(c - d) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2$. Kako je $A \geq 0$, to dati izraz ima najmanju vrijednost 0 za $a = b = c = d$.

35. Neka je $a = 2xy$, $b = x^2 - y^2$, $c = x^2 + y^2$. Tada je $a^2 + b^2 = 4x^2y^2 + x^4 - 2x^2y^2 + y^4 = (x^2y^2)^2 = c^2$, tj. trougao datih stranica je pravougli.

36. Iz $a^2 + a + 1 = 0$ slijedi $a^2 + 1 = -a$ i $a^3 - 1 = (a - 1)(a^2 + a + 1)$, tj. $a^3 = 1$ i dalje važi: $a^{1996} + \frac{1}{a^{1996}} = (a^3)^{665} \cdot a + \frac{1}{(a^3)^{665} \cdot a} = 1^{665} \cdot a + \frac{1}{1^{665} \cdot a} =$
$a + \frac{1}{a} = \frac{a^2+1}{a} = \frac{-a}{a} = -1$.

37. Površina pravouglog $\triangle ABC$ je $P_1 = \frac{AC \cdot BC}{2} = \frac{60 \cdot 45}{2} = 1350\ cm^2$, sl. 17. Takođe, važi: $AB^2 = BC^2 + AC^2$; $AB = 75\ cm$ i $P_1 = \frac{AB \cdot h}{2}$, pa je $h = \frac{2 \cdot P_1}{AB} = 36\ cm$. Takođe iz pravouglih trouglova AED i FBC slijedi $x = \sqrt{AD^2 - h^2}$, $y = \sqrt{BC^2 - h^2}$, te je $x = 15\ cm$ i $y = 27\ cm$. Dalje je $DC = EF = AB - (x + y) = 33\ cm$, pa je obim trapeza $O = 192\ cm$, a površina $P = 1944\ cm^2$.



Sl. 17

38. Važi $\frac{3}{7} = 0{,}428\,571\,428\,571 \cdots$ (dati razlomak je periodičan decimalan broj sa periodom dužine 6). Kako je $155 = 25 \cdot 6 + 5$ i na 155. mjestu se nalazi cifra 7.

39. Datu jednakost možemo zapisati $xy - x = 35$, odnosno $x(y-1) = 35$. Kako je $35 = 7 \cdot 5 = 1 \cdot 35$, to je

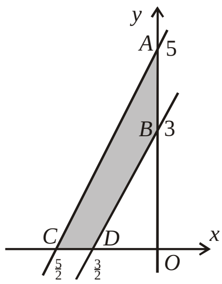
1) $\begin{matrix} x = 7 \\ y - 1 = 5 \end{matrix}$; 2) $\begin{matrix} x = 5 \\ y - 1 = 7 \end{matrix}$; 3) $\begin{matrix} x = 35 \\ y - 1 = 1 \end{matrix}$; 4) $\begin{matrix} x = 1 \\ y - 1 = 35 \end{matrix}$

Dakle, rješenja jednačine $xy - x = 35$ u skupu prirodnih brojeva je skup uređenih parova $\{(1,36), (35,2), (5,8), (7,6)\}$.

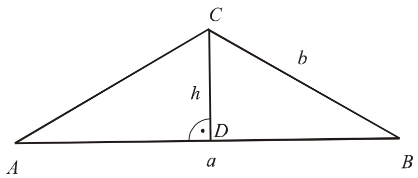
40. Ako zadani broj označimo sa x, onda je $700\,000 + \frac{x-7}{10} = 5 \cdot x$, tj. $x = 142\,857$.

41. Kako je $P(-2) = 16$ to slijedi $\frac{m-9}{4} \cdot (-2) + \frac{m+2}{3} \cdot (-2)^2 - (-2)^3 = 16$, pa je $m = 1$. Za $m = 1$ je $P(x) = -x^3 + x^2 - 2x$, te je $P(1) = -2$.

42. Drugu funkciju napišemo u obliku $y = 2x + 5$. Grafici linearnih funkcija su paralelni ako su im koeficijenti pravca jednaki, tj. ako je $\frac{m-1}{2} = 2$, odnosno $m = 5$. Predstavimo grafički linearne funkcije $y = 2x + 3$ i $y = 2x + 5$, sl. 18. Površina četverougla *ABDC* je $P = P_{\triangle COA} - P_{\triangle DOB} = \frac{\frac{5}{2} \cdot 5}{2} - \frac{\frac{3}{2} \cdot 3}{2} = 4$.



Sl. 18



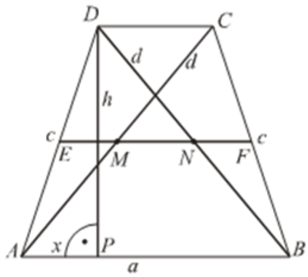
Sl. 19

43. Neka je $\triangle ABC$ osnovica date prizme i neka je $h = CD$ visina koja odgovara osnovici AB, sl. 19. Tada je $\triangle BCD$ pravougli sa oštrim uglovima 30^0 i 60^0, te važi; $b = \frac{a}{\sqrt{3}}$ i $h = \frac{b}{2} = \frac{a}{2\sqrt{3}}$. Dakle, površina B trougla ABC je $B = \frac{ah}{2} = \frac{a^2}{4\sqrt{3}}$.
Površina omotača prizme je $M = (a + 2b) \cdot H = (a + \frac{2a}{\sqrt{3}}) \cdot H$. Kako je $M = 2B$, to slijedi $\left(a + \frac{2a}{\sqrt{3}}\right) \cdot H = 2 \cdot \frac{a^2}{4\sqrt{3}}$, pa je $H = \frac{a}{2\sqrt{3}+4}$ i $V = B \cdot H = \frac{a^3}{8(3+2\sqrt{3})}$.

44. Iz zadane jednakosti slijedi da je $a \leq 2$ (jer bi u suprotnom broj $\overline{dcba}$ ·bio petocifren). Kako je $\overline{dcba}$ ·paran broj, to je $a = 2$ i važi $\overline{2bcd} \cdot 4 = \overline{dcb2}$, pa zaključujemo da je $d \geq 8$ (d je prva cifra). Broj na desnoj strani jednakosti se završava cifrom 2, pa se tom cifrom završava i broj $4d$; odakle zaključujemo da je $d = 8$. Iz jednakosti $\overline{2bc8} \cdot 4 = \overline{8cb2}$ slijedi $400b + 40c + 32 = 100c + 10b + 2$;

$13b = 2c - 1$. Zbog $c \leq 9$ je $2c - 1 \leq 17$, odnosno $13b \leq 17$, pa je $b = 0$ ili $b = 1$. Ako je $b = 0$, onda je $c = \frac{1}{2}$, što je nemoguće. Za $b = 1$ je $c = 7$. Traženi broj je 2 178.

45. a) Prema podacima na sl. 20. dobijamo $AP = x = \frac{9-1}{2} = 4\ cm$, pa je $AP = 5\ cm$. Primjenimo Pitagorinu teoremu na pravougli $\triangle APD$: $c^2 = h^2 + x^2$; $(h+2)^2 = h^2 + 4^2$; $h = 3\ cm$. Dalje iz pravouglog $\triangle PBD$ je $d = \sqrt{BP^2 + PD^2} = \sqrt{34}\ cm$.
b) Kako je EF srednja linija trapeza, to je $EF = \frac{a+b}{2} = \frac{9+1}{2} = 5\ cm$. Duži EM i NF su, redom, srednje linije trouglova ACD, BCD, pa je $EM = NF = \frac{b}{2} = \frac{1}{2}$. Dakle, $MN = EF - EM - NF = 4\ cm$.



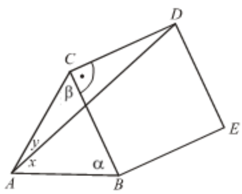
Sl. 20

46. Zbir unutrašnjih uglova pravilnog n - tougla je $(n-2) \cdot 120^0$, a jedan njegov ugao iznosi $\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$. Dakle, unutrašnji ugao pravilnog petougla je 108^0. Prema uslovima zadatka je $\frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} : 108^0 = 3:2$, pa je $9n = 10(n-2)$; $n = 20$.
b) Neka pravilni mnogouglovi imaju m, odnosno n stranica ($m \geq 3$, $n \geq 3$), tada važi $\frac{(m-2)\cdot 180^0}{m} : \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = 3 : 2$, pa je $1 + \frac{4}{m} = \frac{6}{n}$. Iz posljednje jednakosti je $\frac{6}{n} > 1$, tj. $n < 6$, pa je n=3 ili $n = 4$, ili $n = 5$. Uvrštavanjem ovih vrijednosti dobijamo, redom, $m = 4$, $m = 8$, $m = 20$. Postoje tri para mnogouglova.

47. a) Izraz možemo napisati $(x+2)^2 + (y-2)^2 + 2$. Očigledno je $(x+2)^2 + (y-2)^2 + 2 \geq 0$. b) Dati izraz ima najmanju vrijednost 2 za $x = -2$ i $y = 2$.

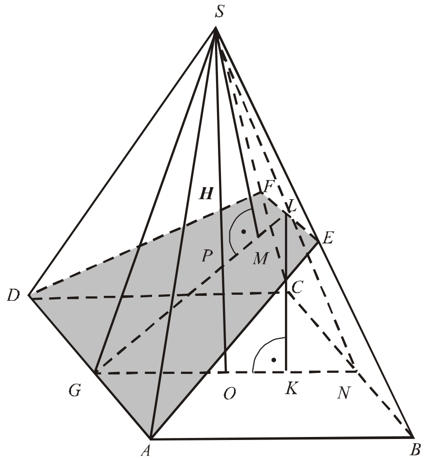
48. Neka je x zadani broj. Tada je $2(x - 900\,000) = \frac{x-8}{10}$; $x = 947\,368$.

49. Trougao ADC je jednakokraki, ($CD = CB = CA$), pa važi $2\gamma + \beta + 90^0 = 180^0$; $\gamma = \frac{90^0 - \beta}{2}$, sl. 21. Dalje je $x = \sphericalangle BAD = \alpha - y = \alpha - \frac{90^0 - \beta}{2} = \frac{2\alpha + \beta - 90^0}{2}$,
$x = \sphericalangle BAD = \alpha - y = \alpha - \frac{90^0 - \beta}{2} = \frac{180^0 - 90^0}{2} = 45^0$.



Sl. 21

50. Presjek zadane ravni i piramide je jednakokraki trapez $AEFD$, sl. 22. Neka su G i L središta osnovica tog trapeza i M presjek normale spuštene iz S na ravan trapeza. Tada je $SM \perp GL$. Neka je LK normala na ravan osnove piramide. Tačka L je središte duži SN, pa je $LK = \frac{H}{2}$. Tačka P je težište trougla SGN, pa je $PO = \frac{H}{3}$ i $PS = \frac{2H}{3}$. Trougao SGN je jednakokraki ($SG = SN$) pa važi $GO = \frac{a}{2}$. U pravo-uglom $\triangle GOP$, je $GP = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{H}{3}\right)^2}$. Iz sličnosti trouglova SMP i GOP slijedi $\frac{SM}{PS} = \frac{GO}{GP}$, pa je $SM = \frac{GO}{GP} \cdot PS = \frac{aH}{3 \cdot GP}$, tj. $SM = \frac{aH}{3 \cdot \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{H}{3}\right)^2}}$. Za $a = 8\ cm$ i $H = 9\ cm$, dobijamo $SM = \frac{24}{5}\ cm$.

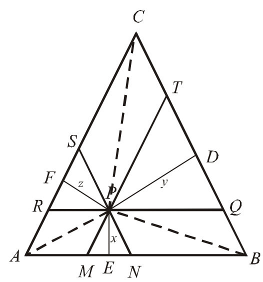


Sl. 22

51. Transformišimo datu jednačinu: $(m^2+1)x = 3m^2+1$. Kako je $m^2+1 \neq 0$ za svaki realni m, rješenje jednačine je $x = \frac{3m^2+1}{m^2+1}$.
a) Rješenje jednačine je očigledno pozitivno za svaki realni m.
b) Iz nejednakosti $\frac{3m^2+1}{m^2+1} > 2$ slijedi $\frac{m^2-1}{m^2+1} > 0$; tj. $m^2 - 1 > 0$, pa je $(m-1)(m+1) > 0$, tj. $m - 1 > 0$ i $m + 1 > 0$ ili $m - 1 < 0$ i $m + 1 < 0$. Rješenje ovih sistema je $m < -1$ ili $m > 1$, tj. $m \in (-\infty, -1) \cup (1, +\infty)$.

52. Neka je $n = 10k + x$, $k \in \mathrm{N} \cup \{0\}$ i x cifra. Tada je $m = n^2 = 100k^2 + 20kx + x^2$. Cifra desetica broja m jednaka je zbiru cifara desetica brojeva $20kx$ i x^2 ili zbiru umanjenom za 10.. Kako je cifra desetica broja $20kx$ parna, to su cifre desetica broja m i x^2 iste parnosti. Broj x^2 je jednocifren ili dvocifren. Ako je jednocifren, cifra desetica mu je 0, pa cifra desetica broja m paran broj, što je suprotno pretpostavci. Ako je x^2 dvocifren, onda su to, prema uslovima zadatka, brojevi 16 i 36. Dakle, posljednja cifra broja m je 6.

53. Prema oznakama na sl. 23.važi: $P=\frac{ah}{2}=P_{ABP}+P_{BCP}+P_{CAP}=\frac{ax}{2}+\frac{ay}{2}+\frac{az}{2}=\frac{a(x+y+z)}{2}$, tj. $x+y+z=h=\frac{a\sqrt{3}}{2}$. Kroz tačku P konstruišimo prave RQ, NS i MT paralelno sa naspramnim stranicama trougla ABC. Trouglovi PMN, PQT i PSR su takođe jednakostranični. Dalje slijedi $RF=\frac{1}{2}RP$, $TD=\frac{1}{2}PQ$ i $NE=\frac{1}{2}MN$, pa je $RF+TD+NE=\frac{RP+PQ+MN}{2}=\frac{AM+NB+MN}{2}=\frac{a}{2}$; $AR+CT+BN=AR+PS+PQ=AR+RS+SC=a$. Dalje je $AF+CD+BE=AR+RF+CT+TD+BN+NE=(AR+CT+BN)+(RF+TD+NE)=a+\frac{a}{2}=\frac{3a}{2}$. Dakle,
$(PD+PE+PF):(AF+CD+BE)=\frac{a\sqrt{3}}{2}:\frac{3a}{2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$.

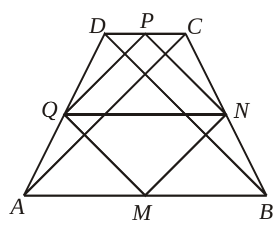


Sl. 23

54. Vidi rješenje zadatka **11**.

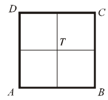
55. a) Duž MN je srednja linija trougla ABC, sl. 24, pa je $MN \| \mathrm{AC}$ i $MN=\frac{1}{2}AC=\frac{d}{2}$. Duž NP je srednja linija $\triangle BCD$, pa je $PN \| \mathrm{PN}$ i $\mathrm{PN}=\frac{1}{2}DB=\frac{d}{2}$. Dakle, $MN=NP$, Iz $AC \perp \mathrm{BD}$ slijedi $MN \perp \mathrm{NP}$. Slično dokazujemo: $MN \perp \mathrm{MQ}$, $MQ \perp \mathrm{QP}$ i $QP \perp \mathrm{PN}$, te je $MQ=QP=PN=MN$

b) Dijagonale kvadrata su međusobno normalne i jednake, pa je $QN=PM=h$. Kako je površina kvadrata $P_1=\frac{QN\cdot MP}{2}=\frac{h^2}{2}$, i površina trapeza $P_2=\frac{AB+CD}{2}\cdot h=QN\cdot h=h^2$, pa je $P_2:P_1=2:1$.



Sl. 24

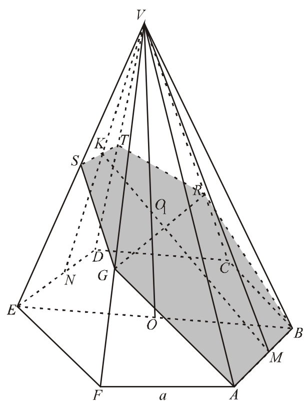
56. Ako zadani kvadrat podijelimo na četiri kvadrata stranice $\frac{1}{2}$, sl. 25, tada se bar dvije tačke moraju nalaziti u istom kvadratu. Najveće rastojanje između njih nije veće od $\frac{d}{2}$, gdje je d dijagonala datog kvadrata. Prema tome, neka je $a = \frac{d}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Dokažimo da a ne može biti manje od $\frac{\sqrt{2}}{2}$. Ako je $a < \frac{\sqrt{2}}{2}$, onda raspored tačaka ne ispunjava zadane uslove (rastojanje između bilo koje dvije tačke je veće od a). Dakle, a ne može biti manje od $\frac{\sqrt{2}}{2}$.



Sl. 25

57. Razlika dva broja djeljiva je sa 7 ako ti brojevi pri dijeljenju sa 7 imaju iste ostatke. Pri dijeljenju sa 7 broj može imati ostatke: $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji 15 brojeva sa zadanom osobinom. To znači da ne postoji više od 14 brojeva koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 0, da ne postoji više od 14 brojeva koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 1, odnosno ostatke: $2, 3, 4, 5, 6$. Tada ukupno nema više od $14 \cdot 7 = 98$ brojeva, što je suprotno pretpostavci. Dakle, postoji 15 brojeva među 100 zadanih sa traženom osobinom.

58. Presjek je šestougao $ABRTSG$, koji je sastavljen od dva trapeze, $ABRG$ i $GRTS$, sl. 26. Neka su M, N, K, redom, središta duži AB, ED, ST. Trougao MVN je jednakostraničan, jer je $\measuredangle MVN = \measuredangle \mathrm{NMV} = 60^0$ i važi: $VN = VM = MN = a\sqrt{3}$, $OV = \frac{3a}{2}$, $MK = \frac{MN\sqrt{3}}{2} = \frac{3a}{2} = OV$. Kako je tačka O_1 je težište trougla MVK, važi $MO_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{3a}{2} = a = O_1V$, pa je $KO_1 = \frac{1}{3}MK = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a}{2} = \frac{a}{23} = O_1O$. Dalje je $FC = 2a$ i $ST = \frac{a}{2}$. Kako je $GR \| \mathrm{FC}$, to je $\triangle FCV \sim \triangle GRV$, pa je $FC : GR = OV : O_1O$, tj. $GR = \frac{4a}{3}$ pa je: $P_{ABRTGS} = P_{ABRG} + P_{GRTS} + \frac{(AB+GR)\cdot MO_1}{2} + \frac{(GR+ST)\cdot KO_1}{2} = \frac{(a+\frac{4a}{3})\cdot a}{2} + \frac{(\frac{4a}{3}+\frac{a}{2})\cdot \frac{a}{2}}{2} = \frac{13a^2}{8}$.

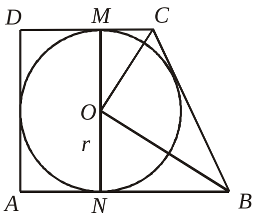


Sl. 26

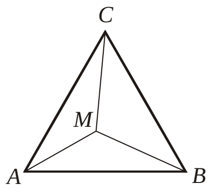
59. Ispišimo nekoliko prvih članova tog niza: $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2, 3$. Kako je $a_7 = a_1$ i $a_8 = a_2$, a svaki sljedeći član dobija se iz dva prethodna, zaključujemo da se članovi niza ponavljaju sa periodom 6. Kako 1966 prii dijeljenju sa 6 daje ostatak 4, to je 1966. član niza jednak četvrtom članu, tj. $a_{1966} = a_4 = \frac{1}{2}$.

60. Kako je krak AD, $(AD \perp AB)$ jednak $2r$, to je krak BC veći od $2r$, sl. 27. Dakle, najkraća stranica trapeza, koja je jednaka $\frac{3r}{2}$, je manja osnovica trapeza CD. Neka su OC i OB simetrale uglova MCB i NCB. Kako je $\sphericalangle MCB + \sphericalangle NBC = 180^0$, to je $\sphericalangle MCO + \sphericalangle OBN = 90^0$ (1). Iz pravouglog $\triangle OBN$ slijedi $\sphericalangle NOB + \sphericalangle OBN = 90^0$ (2). Iz (1) i (2) slijedi $\sphericalangle NOB = \sphericalangle MCO$, pa je $\triangle OBN \sim \triangle OCM$:

$NB : ON = OM : MC$, gdje je $ON = OM = r$ i $MC = \frac{r}{2}$, to je $NB = 2r$ i $AB = AN + NM = r + 2r = 3r$. Dalje je $P_{ABCD} = \frac{AB+CD}{2} \cdot AD = \frac{3r+\frac{3r}{2}}{2} \cdot 2r = \frac{9r^2}{2}$, pa je
$P_k : P_{ABCD} = r^2\pi : \frac{9r^2}{2} = 2\pi : 9$.



Sl. 27



Sl. 28

61. Pretpostavimo da školu treba sagraditi na mjestu M u $\triangle ABC$, sl. 28. Tada važi $AM + MB \geq AB$ (1); $AM + MC \geq AC$ (2), i znak jednakosti u oba slučaja važi samo ako je M identična sa A. Iz (1) i (2) slijedi $20AM + 20MB \geq 20AB$, $10AM + 10MC \geq 10AC$, odakle sabiranjem dobijamo $30AM + 20MB + 10CM \geq 20AB + 10AC$. Kako je lijeva strana posljednje nejednakosti jednaka desnoj samo u slučaju kada se M poklapa sa A, (u protivnom važi stroga nejednakost), zaključujemo da je najekonomičnije sagraditi školu u mjestu A.

62. Iz jednakosti$\{1,2,3\} \cap A = \{2,3\}$ slijedi $2 \in A$, $3 \in A$ i $1 \notin A$. Kako je $A \subset \{2,3,5\}$, to je $A = \{2,3\}$, ili $A = \{2,3,5\}$.

63. Prema zadatku 1. čas je matematika ili istorija; 2. čas - matematika ili geografija; 3. čas - geografija ili istorija, pa raspored može imati dvije varijante: 1. matematika, geografija i istorija; 2. istorija, matematika i geografija.

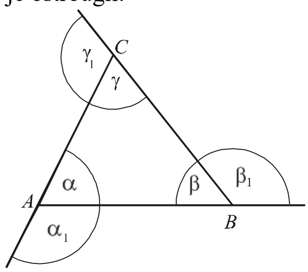
64. Kako je masa 3 veće konzerve jednaka masi 8 manjih konzervi, to je 120 većih konzervi isto što i 320 malih. Masa manje konzerve je $108\,000 : (320 + 40)$ $= 300\ g$; masa veće konzerve: $(80 \cdot 300) : 3 = 800$ g.

65. Da bi broj ***13*** bio djeljiv sa 36 mora biti djeljiv i sa 4 i sa 9. Zbog djeljivosti sa 9 zbir cifara mora biti djeljiv sa 9, te u obzir dolazi zbir 9, odnosno 18. To znači da je zbir nepoznatih cifara 5 ili 24. Zbog djeljivosti sa 4 dvocifreni završetak mora biti 32 ili 36, te u obzir dolaze brojevi *132, odnosno *136. Dakle, riječ je o brojevima 3132, 8136.

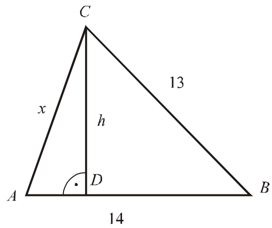
66. Učenik je za 3 dana pročitao $\frac{3}{8}+\frac{5}{12}+\frac{1}{6}=\frac{23}{24}$ knjige i 10 stranica. Znači 10 stranica iznosi $\frac{1}{24}$ knjige, te knjiga ima 240 stranica.

67. Iz jednakosti $\{a,b,c\} \cap \mathrm{X} = \{b,c\}$slijedi $b \in \mathrm{X}$ i $a \notin X$, a iz relacije $\mathrm{X} \subset \{a,b,c,d,e\}$, zaključujemo $\mathrm{X} = \{b,c\}$ ili $\mathrm{X} = \{b,c,d\}$ ili $\mathrm{X} = \{b,c,e\}$ ili $\mathrm{X} = \{b,c,d,e\}$

68. Prema uslovima zadatka i podacima sa sl. 29. je:
$\alpha + \alpha_1 = 180^0$, pa je $\alpha = 49^0$. Slično, iz $\beta + \beta_1 = 180^0$, je $\beta_1 = 101^0$.
Kako je $\beta + \gamma = \alpha_1$, to je $\gamma = 52^0$. Takođe, $\gamma + \gamma_1 = 180^0$, pa je $\gamma_1 = 128^0$. Dakle, trougao je oštrougli.



Sl. 29



Sl. 30

69. Za numerisanje prvih 9 stranica potrebno je 9 cifara; za numerisanje od 10. do 99. stranice potrebno je 180 cifara. Kako je $300-(9+180)=111$, to ostaje 111 cifara za numerisanje trocifrenih brojeva. Kako je $111:3=37$, to knjiga ima $9+99+37=136$ strana.

70. Neka su x i $203+x$ traženi brojevi. Tada je, prema zadatku, $203+x$ =3x+33, pa je $x=85$ i traženi brojevi su 85 i 288.

71. Da bi izraz $\frac{3}{a+6}$ bio cijeli broj +6 mora biti djelilac broja 3.
Dakle, $a+6 \in \{-3,-1,1,3\}$, odnosno $a \in \{-9,-7,-5,-3\}$.

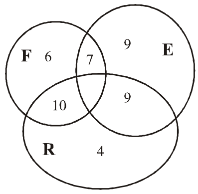
72. $n^3+3n^2-n-3=n^2(n-3)-(n-3)=(n+3)(n-1)(n+1)$. Za $n=2k+1$, k je prirodan broj, dobijamo da je proizvod $(n+3)(n-1)(n+1)$ oblika $8k(k+1)(k+2)$. Kako je $k(k+1)(k+2)$ proizvod tri uzastopna prirodna broja, to je on djeljiv sa 6 (jer je djeljiv i sa 2 i sa 3), pa je $8k(k+1)(k+2)$ djeljiv i sa 48.

73. Prema podacima sa sl. 30, površina trougla je $P=\frac{AB\cdot h}{2}=\frac{14\cdot h}{2}=7h$. Prema uslovima zadatka je $7h=48$; $h=12\ cm$. Primjenimo Pitagorinu teoremu na trouglove DCB i ADC: $DB=\sqrt{BC^2-h^2}=\sqrt{13^2+12^2}=5\ cm$;
$x=AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{9^2+12^2}=15\ cm$.

74. Rastavimo zadani broj na proizvod prostih faktora: $8316=2^2\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11$. Da bi neki prirodan broj bio kvadrat drugog prirodnog broja, moraju se njegovi prosti činioci javljati sa parnim eksponentima. Prema tome, broj 8316 treba pomnožiti sa $3\cdot 7\cdot 11=231$:$8316\cdot 231=(2\cdot 3^3\cdot 7\cdot 11)\cdot(3\cdot 7\cdot 11)=(2\cdot 3^2\cdot 7\cdot 11)^2=13862^2$.

75. Neka je CD visina jednakokrakog $\triangle\, ABC$ na osnovicu AC i neka je AE težišna duž na krak BC. Tačka T je težište $\triangle\, ABC$, pa važi: $AT=\frac{2}{3}AE=\frac{10}{3}\ cm$. Iz $\triangle\, ADT$ slijedi $DT=\sqrt{AT^2-AD^2}=\frac{2\sqrt{7}}{3}\ cm$, pa je $DC=3DT=2\sqrt{7}\ cm$. Iz $\triangle\, ADT$ dobijamo $AC=\sqrt{AD^2+DC^2}=6\ cm$.

76. Broj učenika u odjeljenju je (25+23+33)–(7+9+10) =45, sl. 31, jer je svaki od 7 učenika koji uči engleski i francuski, 9 učenika koji uči engleski i ruski i 10 učenika koji uče francuski i ruski jezik je uračunat u zbir 25+23+23.



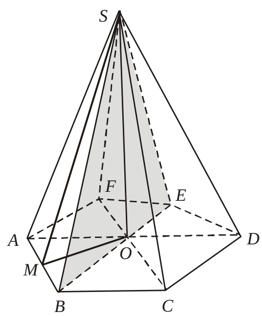
Sl. 31

77. Kako je $\frac{n^5}{120}-\frac{n^3}{24}+\frac{n}{30}=\frac{n(n^2-4)(n^2-1)}{120}=\frac{(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2))}{120}$, to je u brojniku proizvod pet uzastopnih prirodnih brojeva, pa je on djeljiv sa 2, 3, 4 i 5, odnosno i sa sa brojem $2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

78. Neka radnik A uradi sav posao za x dana, a radnik B za y dana. Tada je prema uslovima zadatka $\frac{3}{5}x+\frac{2}{5}y$ i $y=x+5$, pa je $x=10$ dana i $y=15$ dana.

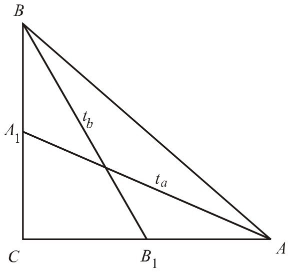
79. Kako je visina bočne strane je $SM=10\ cm$, a $\sphericalangle OMS=60^0$, sl. 32. Trougao SOM je pravougli sa oštrim uglovima od 30^0 i 60^0 pa je on polovina jednakostraničnog trougla stranice $10\ cm$. Odavde slijedi $\mathrm{OS}=\frac{SM}{2}\sqrt{3}=5\sqrt{3}\ cm$, $\mathrm{OS}=\frac{1}{2}SM=5\ cm$. Lako, se iz $\triangle\, OMB$, izračuna da je $\mathrm{OB}=\frac{10}{\sqrt{3}}\ cm$; $\mathrm{BE}=2\mathrm{OB}=\frac{20}{\sqrt{3}}\ cm$, pa je površina $P_{BES}=\frac{BE\cdot OS}{2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{20}{\sqrt{3}}\cdot 5\sqrt{3}=50\ cm^2$.

Sl. 32



80. Neka je $x = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{120}{121}$ i $y = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} \cdot \ldots \cdot \frac{1190}{120}$. Kako je $\frac{2}{3} > \frac{1}{2}$; $\frac{4}{5} > \frac{3}{4}$; $\frac{6}{7} > \frac{5}{6}$; $\frac{120}{121} > \frac{119}{120}$; to je $x^2 > x \cdot y = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{5}{6} \cdot \frac{6}{7} \cdot \ldots \cdot \frac{119}{120} \cdot \frac{120}{121} = \frac{1}{121}$. Odavde slijedi $x > \frac{1}{11}$.

81. Neka su AA_1, BB_1, redom, težišne duži t_a, t_b, sl. 33. Primijenimo Pitagorinu teoremu na trouglove BB_1C i AA_1C: $t_b{}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$, $t_a{}^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + b^2$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo
$a^2 + \frac{b^2}{4} + \frac{a}{4} + b^2 = t_a{}^2 + t_b{}^2$;
$\frac{5}{4}(a^2 + b^2) = t_a{}^2 + t_b{}^2$. Kako je $a^2 + b^2 = c^2$, to važi $\frac{5}{4}c^2 = t_a{}^2 + t_b{}^2$; $c^2 = \frac{4}{5}(t_a{}^2 + t_b{}^2)$;
$c^2 = \frac{4}{5} \cdot 65$; $c = 2\sqrt{13}\,cm$.



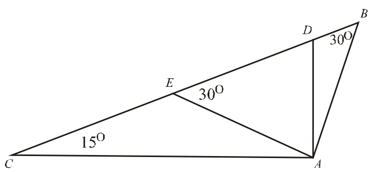
Sl. 33

82. Iz jednakosti $a + b + c = 0$ slijedi $(a + b + c)^2 = 0$; $a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = 0$; $a^2 + b^2 + c^2 = -2(ab + bc + ca)$. Zbog $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ je
$ab + bc + ca = -\frac{1}{2}$. Kvadriranjem posljednje jednakosti dobijamo
$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a + b + c) = \frac{1}{4}$. Kako je $a + b + c = 0$, to je
$a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$. Kvadriranjem jednakosti $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ dobijamo
$a^4 + b^4 + c^4 + 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = 1$, te je, zbog $a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = \frac{1}{4}$,
$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{1}{2}$.

83. Kako je $\overline{abc} = 100a + 10b + c$,to važi $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab} = (a + b + c) \cdot 100 + (a + b + c) \cdot 10 + (a + b + c) = (a + b + c) \cdot 111 = (a + b + c) \cdot 3 \cdot 37$.Da bi broj $(a + b + c) \cdot 3 \cdot 37$ bio kvadrat prirodnog broja mora biti $(a + b + c) = 111$, što je nemoguće. Dakle, broj $\overline{abc} + \overline{bca} + \overline{cab}$ ne može biti potpun kvadrat priodnog broja.

84. Kako je: $x^5 + y^5 - x^4y - y^4x = x^5 - x^4y + y^5 - y^4x = x^4(x - y) + y^4(y - x) = (x - y)(x^4 - y^4) = (x - y)(x - y)(x + y)(x^2 + y^2) = (x - y)^2(x + y)(x^2 + y^2)$. Kako je $x^2 + y^2 \geq 0$ i, prema uslovu zadatka, $x + y \geq 0$, to je $x^5 + y^5 - x^4y - y^4x \geq 0$, što je i trebalo dokazati.

85. Trougao ACD je pravougli, sl. 34. Ako je E središte hipotenuze CD, tada su AC i ADE jednakokraki trouglovi i $AE = CE = ED$. Pri tome je $\sphericalangle AED = 2 \cdot 15^0$ (spoljašnji ugao $\triangle ACE$). Onda je i $\triangle ABE$ jednkokraki (dva ugla po 15^0) i $AB = AE$. Iz $AB = AE = CE$ i $CD = 2CE$ slijedi da je $CD = 2AB$.



Sl. 34

86. Dati kvadrat podijelimo na 16 kvadrata stranice 1 cm. Kako ima 81 tačka to se bar u jednom kvadratu nalazi najmanje 6 tačaka. Tih šest tačaka su na međusobnoj udaljenosti koja je manja od dužine dijagonale kvadrata u kojem se nalaze. Prema uslovima zadatka, dužina stranice kvadrata je 1 cm, pa je dužina dijagonale $\sqrt{2}\,cm$. Kako je $\sqrt{2}\,cm \approx 1{,}41\,cm < 1{,}6\,cm$, to se tih 6 tačaka, koje pripadaju kvadratu stranice 1 cm, nalazi u krugu poluprečnika 0,8 cm.

87. Transformišimo dati izraz: $xy + 3x - 5y + 3 = 0$; $xy + 3x - 5y - 15 + 18 = 0$; $x(y + 3) - 5(y + 3) = -18$; $(y + 3)(x - 5) = -18$.
Formirajmo tabelu prema uslovima zadatka:

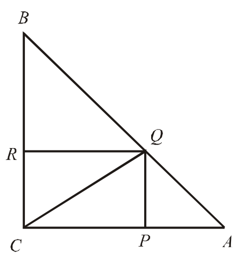
$x-5$	–18	–9	–6	–3	–2	–1	18	9	6	3	2	1
$y+3$	1	2	3	6	9	18	–1	–2	–3	–6	–9	–18
x	–13	–4	–1	2	3	4	23	14	11	8	7	6
y	–2	–1	0	3	6	15	–4	–5	–6	–9	–12	–21

Rješenja su: (–13,–2), (–4,–1), (–1,0), (2,3), (3,6), (4,15), (23,–4), (14,–5), (11,–6), (8,–9), (7,–12), (6,–21).

88. Transformišimo izraz: $x^3 + y^3 + z^3 - 3xy = x^3 + y^3 + 3xy(x + y) + z^3 - 3xy(x + y) - 3xy = (x + y)^3 + z^3 - 3xy(x + y + z) = (x + y + z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz) \geq 0$, jer je $x + y + z \geq 0$, a važi i $x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = \frac{1}{2}(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 2xy - 2xz - 2yz) = \frac{1}{2}((x - y)^2 + (x - z)^2 + (z - y)^2) \geq 0$.
Dakle, $x^3 + y^3 + z^3 - 3xy \geq 0$, što je i trebalo dokazati.

89. Neka je x četverocifreni broj koji treba dopisati broju 400. Tada se dobijeni broj može zapisati kao $4\,000\,000 + x$, $x \leq 9\,999$. Kako je $\sqrt{4\,000\,000} = 2\,000$, to bi broj čiji je kvadrat jednak traženom sedmocifrenom broju $4\,000\,000 + x$ mogao biti $2\,000 + y$. Znači, $4\,000\,000 + x = (2000 + y)^2$; $x = (4\,000 + y)y$. Dalje slijedi: za $y = 0$ je $x = 0$; za $y = 1$ je $x = 4001$; za $y = 2$ je $x = 8004$. Za $y \geq 3$ je $x > 9\,999$. Prema tome, brojevi koji ispunjavaju uslov su: a) 2 000, jer je $2\,000^2 = 4\,000\,000$; b) 2001, jer je $2001^2 = 4004001$; c) 2002, jer je $2002^2 = 4008004$.

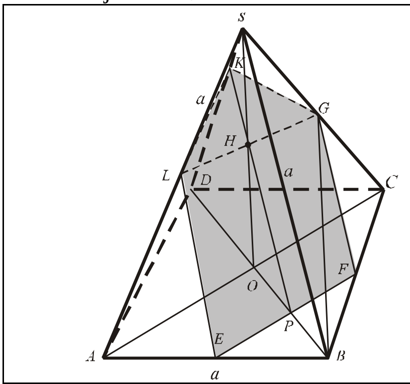
90. Neka je duž CQ konstruisana prema uslovima zadatka, sl. 35, $BC = \sqrt{3}$, $\sphericalangle ACQ : \sphericalangle BCQ = 1 : 2$ i $AQ : BQ = 1 : 3$. Neka je $QP \| BC$ i $QR \| AC$. Iz datog odnosa slijedi



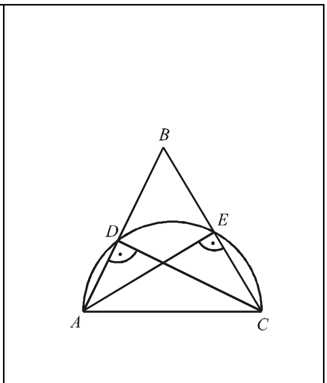
Sl. 35

$\sphericalangle PCQ = 30^0$, $\sphericalangle QCR = 60^0$, pa je $PQ = \frac{CQ}{2}$. Iz sličnosti trouglova: $\triangle AQP \sim \triangle ABC$ slijedi $QP : BC = AQ : AB$, tj. $QP : \sqrt{3} = 1 : 4$; $QP = \frac{\sqrt{3}}{4} = RC$, pa je $CQ = 2QP = \frac{\sqrt{3}}{2}$. U pravouglom $\triangle CPQ$ važi $CP^2 = CQ^2 - QP^2 = \frac{9}{16}$, $CP = \frac{3}{4}$, tj. $QR = CP = \frac{3}{4}$, $BR = BC - RC = \sqrt{3} - \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{3}$. U pravouglom $\triangle BRQ$ važi $BQ^2 = BR^2 + RQ^2 = \frac{9}{4}$, tj. $BQ = \frac{9}{2}$. Iz $AQ : BQ = 1 : 3$ slijedi $AQ = \frac{1}{2}$, pa je $AB = AQ + BQ = 2$.

91. Presjek je petougao $EFGKL$, sl. 36, koji se sastoji od dva podudarna trapeza $LEPK$ i $GFPK$ sa paralelnim stranicama $EL = FG = \frac{a}{2}$, $PK = \frac{3a}{2}$ i visinom $EP = PF = \frac{a\sqrt{2}}{4}$. Površina presjeka je $P = 2 \cdot \frac{\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{4} = \frac{5\sqrt{2}}{16}a^2$.
Za $a = 4\ cm$ je $P = 5\sqrt{2}\ cm^2$.



Sl. 36



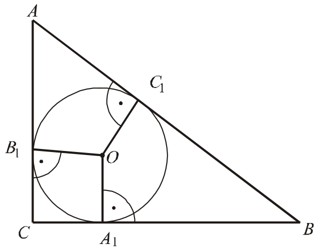
Sl. 37

92. $(a^2 + b^2) : ab = 5 : 2$; $2a^2 + 2b^2 - 5ab = 0$; $2a^2 - 4ab + 2b^2 - ab = 0$; $2a(a - 2b) + b(2b - a) = 0$; $(a - 2b)(2a - b) = 0$. Iz posljednje jednakosti zaključujemo da je $a = 2b$ ili $b = 2a$. Kako je $b > a > 0$ to je $b = 2a$. Dakle,
$(a + b) : (a - b) = 3a : (-a) = -3$.

93. Neka je m najveći zajednički djelilac brojeva $A = n^2 + 1$ i $B = (n + 1)^2 + 1$. Tada je $m|(\mathrm{B} - \mathrm{A})$, odnosno $m|(2n + 1)$ te postoji prirodan broj k tako da je $2n + 1 = mk$, tj. $n = \frac{mk-1}{1}$ (1). Kako $m|\mathrm{A}$, to postoji prirodan broj l tako da važi $\mathrm{A} = ml$, odnosno $n^2 + 1 = ml$ (2). Iz (1) i (2) slijedi $ml = \left(\frac{mk-1}{2}\right)^2 + 1$; $4ml = m^2k^2 - 2mk + 1 + 4$; $m(4l + 2k - mk^2) = 5$. Na osnovu posljednje jednakosti slijedi $m|5$. Dakle, najveći zajednički djelilac brojeva $n^2 + 1$ i $(n + 1)^2 + 1$ je 1 ili 5.

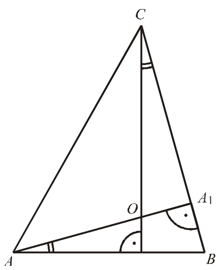
94. Kako je $\mathrm{BE} = EC$ i $\sphericalangle AEC = 90^0$, to je $\triangle ABC$ jednakokraki te je $AB = AC = 1$, sl. 37. Kako je $AD : DB = 1 : 2$, to je $AD = \frac{1}{3}$ i $DB = \frac{2}{3}$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na trougao ADC: $DC^2 = AC^2 - AD^2$; $DC^2 = 1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2$; $DC = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
Površina $\triangle ABC$: $P = \frac{1}{2}AB \cdot DC$; $P = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot \frac{2\sqrt{2}}{3} = \frac{\sqrt{2}}{3}\ cm^2$.

95. Neka je $a = BC$, $b = AC$ i $c = AB$, sl. 38. Kako je $AC_1 = AB_1, CA_1 = CB_1$, $BA_1 = BC_1$ to važi $AC_1 = c - BC_1 = c - (a - CA_1) = c - a + b - AC_1$. Dakle, važi $AC_1 = c - a + b - AC_1$, t.j. $AC_1 = \frac{c-a+b}{2}$ (1). Slično, $BC_1 = \frac{c-b+a}{2}$ (2). Kako je $c^2 = a^2 + b^2$, iz (1) i (2) slijedi: $AC_1 \cdot BC_1 = \frac{c-a+b}{2} \cdot \frac{c-b+a}{2} = \frac{ab}{2}$

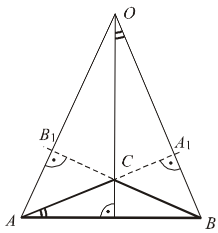


Sl. 38

96. a) Tačka O je unutar $\triangle ABC$ (sl. 39.), važi $\sphericalangle OCB = 90^0 - \sphericalangle ABC = \sphericalangle BAA_1$. Kako je $AB = OC$ to je $\triangle CA_1O \equiv \triangle AA_1B$, pa važi $CA_1 = AA_1$. Takođe je $\sphericalangle CA_1A = 90^0$, te je $\triangle CA_1A$ jednakokraki i pravougli. Dakle, $\sphericalangle ACB = 45^0$.
b) Tačka O je van $\triangle ABC$, sl. 40, $\sphericalangle COB = 90^0 - \sphericalangle ABO = \sphericalangle BAA_1$. Kako je $OC = AB$ to je $\triangle OA_1C \equiv \triangle BA_1A$ i važi $OA_1 = A_1A$. Trougao OA_1A je jednakokraki i pravougli te je $\sphericalangle AOA_1 = 45^0$ i $\sphericalangle ACB = \sphericalangle A_1CB_1 = 180^0 - \sphericalangle AOA_1 = 180^0 - 45^0 = 135^0$.



Sl. 39

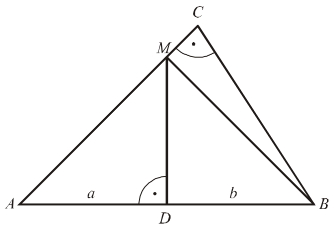


Sl. 40

97. Iz $x + y + z = 0$ slijedi $x + y = -z$, pa važi $(x + y)^3 = (-z)^3$;
$x^3 + y^3 + 3x^2y + 3xy^2 = -z^3$; $x^3 + y^3 + 3xy(x + y) = -z^3$. Dalje, zbog $x + y = -z$ i $x^3 + y^3 + z^3 = -36$, slijedi $x^3 + y^3 - 3xyz$; $xyz = -12$. Dakle, tražimo cijele brojeve x, y, z tako da je $x + y + z = 0$ i $xyz = -12$. To su brojevi 1, 3 i -4 i tražene trojke (x, y, z) su: (1,3,–4), (1,–4,3), (3,1,–4), (3,–4,1), (–4,1,3) i (–4,3,1).

98. Ako se od 53 data različita prirodna broja ne mogu izabrati dva čiji je zbir 53, onda u svakom paru $(k, 53 - k)$, $k = 1,2,3,\cdots,26$ može biti najviše jedan od datih brojeva. To znači da najviše 26 datih brojeva mogu biti manji od 53. Nihov zbir nije manji od $1 + 2 + 3 + \cdots + 25 + 26 = 351$, a zbir ostalih nije manji od $53 + 54 + 55 + \cdots + 78 + 79 = 1782$, pa zbir svih nije manji od $2133 < 2132$.

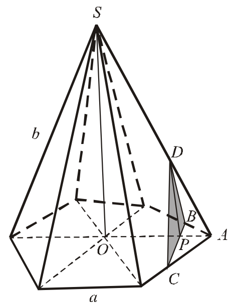
99. a) $M \in$ AC i $M \not\equiv C$, sl. 41. Slijedi $a > b$, jer je $\frac{1}{2} \cdot a \cdot BM > \frac{1}{2} \cdot b \cdot DM$. Slično se dokaže i obratno, ako je $a > b$, tada $M \in$ AC i $M \not\equiv C$. Dakle, $\triangle ADM \sim \triangle ACB$, a prema uslovima zadatka je



Sl. 41

$P_{ABC} : P_{ADM} = 2 : 1$, pa je $AC : AD = \sqrt{2} : 1$, tj. $AC = a\sqrt{2}$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle ABC$: $BC^2 = (a+b)^2 - (a\sqrt{2})^2$; $BC = \sqrt{b^2 + 2ab - a^2}$, pa je $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot AC \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot a\sqrt{2} \cdot \sqrt{b^2 + 2ab - a^2}$. b) Slično, ako je $b > a$, tada tačka $M \in$ BC, pa je $P_{ABC} = \frac{1}{2} \cdot b\sqrt{2} \cdot \sqrt{a^2 + 2ab - b^2}$. c) Ako je $a = b$, tada je $M \equiv$ C i dobijamo $P_{ABC} = a^2$.

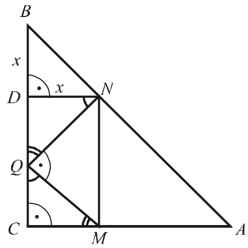
100. Prema uslovima zadatka je AC $= AB = \frac{a}{2}$, sl. 42. Trougao ABP je pravougli sa oštrim uglovima $\sphericalangle PAB = 30^0$ i $\sphericalangle ABP = 60^0$, pa je $AP = \frac{a}{4}$, OA $= a$, $BC = \frac{a}{2}$. Iz sličnosti $\triangle ADP \sim \triangle ASO$ je $AP : AO = DP : SO$, tj.
$DP = \frac{AP \cdot SO}{AO} = \frac{SO}{4} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{SA^2 - OA^2} = \frac{1}{4} \cdot \sqrt{b^2 - a^2}$.
Dakle, $P_{BCD} = \frac{1}{2} \cdot BC \cdot DP = \frac{1}{2} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \sqrt{b^2 - a^2} = \frac{a\sqrt{3}}{16} \cdot \sqrt{b^2 - a^2}$.
Specijalno, za $a = 4$ i $b = 8$ je $P_{BCD} = 3$.



Sl. 42

101. Neka je $AC = BC = a$, sl. 43. Tada je $P_{ABC} = \frac{a^2}{2}$. Neka je $ND \perp BC$ i $DB = x$, pa je $DN = x$. Lako se zaključuje da je $\triangle NDQ \cong \triangle MQC$, odakle slijedi $QC = DN = x$. Prema tome, $DQ = a - 2x$. Označimo sa $u = NQ = MQ$. Primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle NDQ$, dobijamo: $u^2 = ND^2 + DQ^2 = x^2 + (a-2x)^2 =$

$5x^2-4ax+a^2=5(x^2-\frac{4}{5}ax+\frac{a^2}{5}=5\left(x^2-\frac{4}{5}ax+\frac{4a^2}{25}+\frac{a^2}{25}\right)=5\left(x-\frac{2}{5}a\right)^2+\frac{a^2}{5}.$ Dalje računamo: $P_{MNQ}=\frac{u^2}{2}$; $P_{MNQ}:P_{ABC}=\frac{u^2}{2}:\frac{a^2}{2}=u^2:a^2=\left(5\left(x-\frac{2}{5}a\right)^2+\frac{a^2}{5}\right):a^2$. Najmanja vrijednost ovog količnika za $x=\frac{2}{5}a$, je $P_{MNQ}:P_{ABC}=\frac{a^2}{5}:a^2=1:5$.



Sl. 43

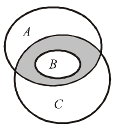
102. Neka su a, b i c traženi brojevi. Tada je: $a+b=332$, $b+c=274$ i $c+a=390$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo $2(a+b+c)=996$. Kako je $a+b+c=498$ i $a+b=332$, to je $c=166$. Slično dobijamo: $a=224$; $b=108$.

103. Prema uslovima zadatka, broj $\overline{a5b4}$ je djeljiv sa 4 i sa 3. Da bi bio djeljiv sa 4, njegov dvocifreni završetak $\overline{b4}$mora bit djeljiv sa 4 i, te $b\in\{0,2,6,8\}$. (Ne može biti $b=4$, jer četverocifrenom broju $\overline{a5b4}$ sve cifre su različite.) Da bi broj $\overline{a5b4}$ bio djeljiv sa 3, njegov zbir cifara mora biti djeljiv sa 3. Dalje zaključuje-mo: za $b=0$ slijedi $a=3$ ili $a=6$ ili $a=9$. Slično, za $b=2$ je $a=1$ ili $a=7$; za $b=6$ je $a=3$ ili $a=9$; i za $b=8$ dobijamo da je $a=1$ ili $a=7$. Dakle, traženi brojevi su: 3504, 6504, 9504, 1524, 7524, 3564, 9564, 1584 i 1574.

104. Površina 600 keramičkih pločica oblika kvadarata stranice 15 cm je $P=600\cdot 15^2=135\,000\ cm^2$. Neka je potrebno n pločica oblika pravouga-onika stranica 10 cm i 20 cm. Tada je, prema uslovima zadatka, $P=n\cdot 10\cdot 20=n\cdot 200$. Kako je $P=135\,000$, to dobijamo $n=675$.

105. Prema zadatku odličnih je 120, vrlo dobrih i dobrih 252, dovoljnih 40. Nedovoljnih je $720-(120+252+252+40)=56$.

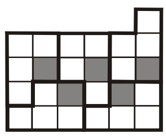
106. a)



Sl. 44

b) $((R\cup T)\backslash S)\cup S\cap T)$.

107.



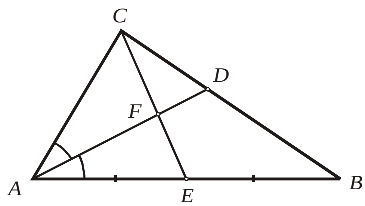
Sl. 45

108. Jedna mogućnost je (redoslijed prevoza posjetilaca nije bitan): 1. Lift koristi jedan posjetilac težine 80 kg; 2. Lift se vraća prazan u prizemlje; 3. Lift koristi drugi posjetilac težine 80 kg; 4. Lift se vraća prazan u prizemlje; 5. Lift koriste posjetilac težak 60 kg i treći posjetilac koji ima 80 kg. Dakle, lift treba preći rastojanje između prizemlja i posljednjeg sprata najmanje pet puta.

109. Ako broju n na kraju dopišemo nulu, on se poveća za 9 puta: n·10=n+9·n. Dakle, prvi sabirak je $(10\,001 - 2\,801) : 9 = 800$, a drugi $2\,801 - 800 = 2\,001$.

110. Neka su a i b traženi brojevi. Tada je, prema uslovima zadatka: $2652 = a \cdot b$, $2244 = (a-2) \cdot b$. Iz posljednje jednakosti, zbog $2652 = a \cdot b$, slijedi $2244 = a \cdot b - 2b$; $b = 204$. Dalje, iz jednakosti $2652 = a \cdot b$, za $b = 204$ dobijamo $a = 13$. Traženi brojevi su 13 i 204.

111. Neka se težišna linija CE i simetrala AD trougla ABC sijeku u tački F, sl. 46. U $\triangle\, CAE$, prema zadatku, duž AF je visina tog trougla, te zaključujemo da je $\triangle\, CAE$ jednakokraki; $AC = AE$. Kako je $AE = AB = 6\ cm$, to je $AC = 6\ cm$.



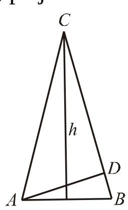
Sl. 46

112. Proizvod tri uzastopna prosta broja 23, 29, 31 je petocifreni broj. Provjeravanjem dobijamo da su traženi brojevi 7, 11 i 13: 7·11·13=1001.

113. a) Prema uslovima zadatka je $(2{,}5x - 2)^2 = (2x)^2 + (14 - 1{,}5x)^2$, pa je $x = 6$. b) Za x=6 dobijamo $a(6) = 12$, $b(6) = 5$, $c(6) = 13$. Za katete a i b i hipotenuzu c pravouglog trougla računamo poluprečnik r upisanog kruga: $r = \frac{a+b-c}{2}$; $r = 2$.

114. Kako je $x(x-2y) + y(x+y) - a^6 = x^2(x-2y) + y(x+y) - a^6$, $x^2 = a^6 - 6x^3 + 9$, $y^2 = a^6 + 6x^3 + 9$ i $xy = a^6 - 9$, to važi $(a^6 - 6x^3 + 9) + (a^6 + 6x^3 + 9) - (a^6 - 9) = 27$; $-6(x^3 - y^3) + 27 = 27$; $6(x^3 - y^3) = 0$. Kako je $x^3 - y^3 = (x-y)(x^2 + xy + y^2)$ i $x - y = 0$, to slijedi $x(x-2y) + y(x+y) - a^6 = 27$, što je i trebalo dokazati.

115. a) Neka je AD visina na krak CB jednakokrakog $\triangle\, ABC$ $(AC = BC)$, sl. 47. Trougao ADC je pravougli sa oštrim uglovima 30^0 i 60^0. Kako je $AC = 1\ cm$ to je $AD = 0{,}5\ cm$, $CD = \frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$, pa je $DB = \frac{2-\sqrt{3}}{2}\ cm$.

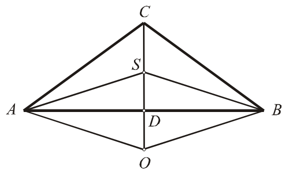


Sl. 47

b) Primijenimo Pitagorinu teoremu na pravougli $\triangle ABD$: $AB^2 = AD^2 + DB^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2}\right)^2 = \frac{4(2-\sqrt{3})}{4}$, pa je $AB = \sqrt{2-\sqrt{3}}\,cm$. Neka je h visina jednakokrakog $\triangle ABC$. Tada je njegova površina $P = \frac{AB\cdot h}{2}$, odnosno $P = \frac{CB\cdot AD}{2}$ i važi $AB\cdot h = CB\cdot AD$, tj. $h = \frac{CB\cdot AD}{AB}$, pa je $h = \frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}$. Racionalisanjem nazivnika dobijamo:

$$\frac{1}{2\sqrt{2-\sqrt{3}}}\cdot\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{\sqrt{2-\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2(2-\sqrt{3})}\cdot\frac{2+\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})^2}}{2(2-\sqrt{3})\cdot(2+\sqrt{3})} = \frac{\sqrt{\left((2-\sqrt{3})(2+\sqrt{3})\right)\cdot(2+\sqrt{3})}}{2} = \frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}\ cm.$$

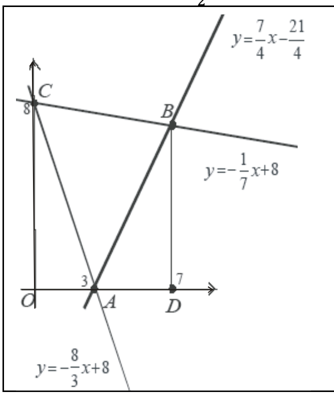
116. Neka su tačke S i O, redom, centar upisanog i centar opisanog kruga oko trougla ABC, sl. 48. Prava OS je simetrala duži AB, $OS\cap AB = \{D\}$, pa je $OA = OB$ i $\sphericalangle DAS = \sphericalangle DBS$, tj. $\frac{\alpha}{2} = \frac{\beta}{2}$, $\alpha = \beta$. Znači $\triangle ABC$ je jednakokraki i $AC = BC$, a tačka C pripada pravoj OS. Poluprečnici OA i OC upisanog kruga su jednaki, pa je $\sphericalangle OAC = \sphericalangle OCA$, tj. $\frac{3\alpha}{2} = \frac{\gamma}{2}$, odnosno $\gamma = 3\alpha$. Iz zbira unutrašnjih uglova slijedi $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180^0$; pa je $\alpha = 36^0$ i $\gamma = 108^0$.



Sl. 48

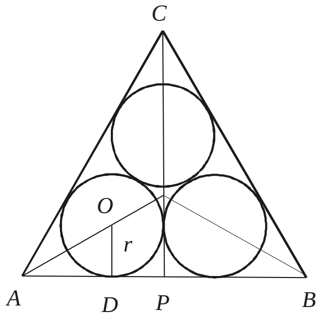
117. Neka je A četvorocifreni broj, a n prirodan broj tako da, prema uslovima zadatka važi: $21\cdot A = n^3$. Zaključujemo da je $A = 21^2\cdot m$, gdje je m kub nekog prirodnog broja. Kako je A četverocifreni broj, to je $m = 2^3 = 8$, jer za $m \neq 8$ broj A nije četverocifren. Dakle $A = 21^2\cdot 8 = 3528$.

118. Grafici datih funkcija grade $\triangle ABC$, sa koordinatama $A(3,0)$, $B(7,7)$ i $C(0,8)$, sl. 49. Uočimo trapez $ODBC$ i trouglove OAC i ADB. Njihove površine su $P_{ODBC} = \frac{OC+BD}{2}\cdot OD = \frac{8+7}{2}\cdot 7 = \frac{105}{2}$; $P_{OAC} = \frac{OA\cdot OC}{2} = \frac{3\cdot 8}{2} = 12$; $P_{ADB} = \frac{AD\cdot DB}{2} = \frac{4\cdot 7}{2} = 14$; pa važi: $P_{ABC} = P_{ODBC} - P_{OAC} - P_{ADB} = \frac{53}{2}$.



Sl. 49

119. Neka je R poluprečnik kruga upisanog u jednakostranični $\triangle ABC$, sl. 50, trougao AOD je pravougli sa oštrim uglovima 30^0 i 60^0. Kako je $AO = 2r$, $AD = \frac{AO\sqrt{3}}{3} = r\sqrt{3}$, $DP = OD = r$ i $AP = AD + DP = 1\ cm$, slijedi $r\sqrt{3} + r = 1$; $r(\sqrt{3}+1) = 1$; $r = \frac{1}{\sqrt{3}+1}$, pa je $r = \frac{1}{\sqrt{3}+1} \cdot \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}-1} = \frac{\sqrt{3}-1}{2}\ cm$.



Sl. 50

120. Prema uslovima zadatka je $M = (a+b+c)\cdot H$, gdje je H visina prizme, i važi $96 = 16 \cdot H$, $H = 6\ cm$. Površina osnove: $B = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$, pa je $B = 12\ cm^2$. Zapremina prizme $V = B \cdot H = 12 \cdot 6 = 72\ cm^3$.

121. Ako su a, b i c ivice kvadra, a d njegova dijagonala. Prema uslovima zadatka je $a : b : c = 2 : 3 : 6$ i $d = \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, tj. $a = 2k$, $b = 3k$, $c = 6k$, gdje je k prirodan broj te važi $d = \sqrt{(2k)^2 + (3k)^2 + (6k)^2} = 7k$. Odavde dobijamo $k = 6$, pa je $a = 12\ cm$, $b = 18\ cm$ i $c = 36\ cm$. Dakle, površina dijagonalnog presjeka kojem pripada najduža ivica:

$$D = c \cdot \sqrt{a^2+b^2} = 36 \cdot \sqrt{12^2+18^2} = 213\sqrt{13}\ cm^2.$$

122.

a)

1	**5**	**4**	**3**	2
3	2	**1**	5	**4**
5	**4**	3	**2**	1
2	**1**	**5**	**4**	3
4	3	**2**	1	**5**

b) Svaki od tako dobijenih petocifrenih brojeva je djeljiv sa 3, a dobijeni zbir se završava cifrom 5. Dakle, zbir je djeljiv sa 15.

123. Unakrsni uglovi su jednaki i neka je α oštar, a β tup ugao. Prema uslovima zadatka je $2\alpha = \frac{\beta}{2}$, te je tupi ugao β četiri puta veći od oštrog ugla α, tj. $\beta = 4\alpha$. Kako je $\alpha + \beta = 180^0$, to je, zbog $\beta = 4\alpha$; $5\alpha = 180^0$, odnosno $\alpha = 36^0$, pa je $\beta = 114^0$.

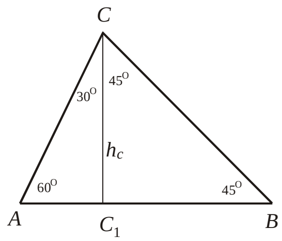
124. Ako 5 autobusa i 2 trolejbusa prevezu 300 putnika, onda će 10 autobusa i 4 trolejbusa prevesti 600 putnika. Ako 2 autobusa i 3 trolejbusa prevezu 230 putnika, onda će 10 autobusa i 15 trolejbusa prevesti 1150 putnika. Dalje zaključujemo da će 11 autobusa prevesti 1150–600=550 putnika, te će jedan trolejbus prevesti 50 putnika (550:11), a jedan autobus 40 putnika.

125. Kako je $7890 = \overline{ABCD} + \overline{ABC} + \overline{AB} + \bar{A} = (1000A + 100B + 10C + D) + (100A + 10B + 1C) + (10A + B) + A = 1111A + 111B + 11C + D$. Dakle, $1111A + 111B + 11C + D = 7890$ (1). Odavde slijedi da je $A = 7$, te je $111B + 11C + D = 113$ (2). Iz (2) slijedi $B = 1$, te je $11C + D = 2$ (3) Iz (3) slijedi: $C = 0$ i $D = 8$, pa je $\overline{ABCD} = 7102$.

126. Kako je $140 = 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 7$, to su 4, 5 i 7 jednocifreni imenioci traženih razlomaka. Tada je, prema uslovima zadatka,
$\frac{a}{4} + \frac{b}{5} + \frac{c}{7} = \frac{35a}{140} + \frac{28b}{140} + \frac{20c}{140} = \frac{83}{140}$, te važi $35a + 28b + 20c = 83$. Kako je $35 + 28 + 20 = 83$, to je $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$. Traženi razlomci su $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{7}$: $\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} = \frac{83}{140}$.

127. Trocifreni broj n je djeljiv sa i 3 i sa 5. Cifra jedinica ne može biti 0, jer tada n nije trocifren broj. Dalje zaključujemo da je cifra jedinica i stotica 5. Da bi traženi broj bio djeljiv i sa 3, zbir cifara mora biti djeljiv sa 3. Dakle, traženi brojevi su 525, 555, 585.

128. Neka je ABC traženi trougao, sl. 51. Uočimo jednakokraki pravougli trougao CC_1B i pravougli trougao AC_1C (sa oštrim uglovima 30^0 i 60^0). Prvo konstruišemo trougao CC_1B čija je kateta poznata (h_C). Zatim konstruišemo trougao AC_1C, kome su dati oštri uglovi i kateta $CC_1 = h_C$.



Sl. 51

129. Prema uslovima zadatka je $O_{ABA_1} = a + \frac{b}{2} + t = 17$, $O_{AA_1C} = t + \frac{b}{2} + b = 19$, gdje su O_{ABA_1} i O_{AA_1C} obimi trouglova ABA_1 i AA_1C. Sabiranjem jednakosti $a + \frac{b}{2} + t = 17$ i $t + \frac{b}{2} + b = 19$ dobijamo $2t + a + 2b = 36$, pa je $t = 7\ cm$, zbog $O_{ABC} = 22\ cm$. Za $t = 7\ cm$ iz $t + \frac{b}{2} + b = 19$, dobijamo $b = 8\ cm$, a iz $a + \frac{b}{2} + t = 17$ je $a = 6\ cm$.

130. Neka je x traženi broj. Tada je, prema uslovima zadatka:
$(((10\,x+8):13)+5):11=21$; $(10\,x+8):13=21\cdot 11-5$; $10\,x+8=(21\cdot 11-5)\cdot 13$;
$10\,x=(21\cdot 11-5)\cdot 13-8$; $10\,x=2930$; $x=293$.

131. Broj 30 je najmanji zajednički sadržalac za 6 i b, te važi $b \in \{5, 10, 15, 30\}$. Za $b = 5$ je $\frac{a}{6} - \frac{2}{5} = \frac{1}{30}$; $\frac{5a-12}{30} = \frac{1}{30}$; $5a - 12 = 1$. Odavde slijedi da a nije prirodan broj. Slično, za $b = 10$ i $b = 30$, slijedi da a nije prirodan broj. Najzad za $b = 15$ dobijamo da je $a = 1$ i važi $\frac{1}{6} - \frac{2}{5} = \frac{1}{30}$.

132. Iz jednakosti $2b = c + a$ slijedi $c = 2b - a$. Kvadriranjem ove jednakosti dobijamo $c^2 = 4b^2 - 4ab + a^2$. Kako je $c^2 = a^2 + b^2$ to iz $c^2 = 4b^2 - 4ab + a^2$ slijedi $3b^2 = 4ab$. Kako je trougao pravougli njegova površina je $P = \frac{ab}{2}$; $2P = ab$; $ab = 108$. Dakle, $3b^2 = 432$; $b = 12\ cm$. Iz $ab = 108$, za $b = 12\ cm$, je $a = 9\ cm$, te je, zbog $c^2 = a^2 + b^2$, $c = 15\ cm$. Obim: $O = 36\ cm$.

133. Kako je $4 + 7\sqrt{3} = \left(2 + \sqrt{3}\right)^2$, to se iz $x^2 + \sqrt{3} = \sqrt{7 + 4\sqrt{3}}$ dobije $x^2 + \sqrt{3} = 7 + \sqrt{\left(2 + \sqrt{3}\right)^2}$; $x^2 + \sqrt{3} = 7 + 2 + \sqrt{3}$; $x^2 = 9$, te je $x = 3$ ili $x = -3$.

134. Desnu stranu nejednakosti možemo pisati
$ab + bc + ca < c^2 + c^2$. Kako je, prema uslovima zadatka, $b^2 + a^2 = c^2$, to iz posljednje nejednakosti slijedi: $ab + bc + ca < a^2 + b^2 + c^2$; $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$. Takođe važi $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}(2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ca) = \frac{1}{2}\left((a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2ca + a^2)\right) = \frac{1}{2}((a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2) \geq 0$. Dakle, nejednakost $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca \geq 0$ je ekvivalentna nejednakosti $(a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 \geq 0$.

135. Kako je $MP^2 = MA^2 - AP^2$ i $MP^2 = MB^2 - PB^2$, odnosno $MQ^2 = MB^2 - BQ^2$ i $MQ^2 = MC^2 - CQ^2$, to je $MA^2 - AP^2 = MB^2 - PB^2$, odnosno $MB^2 - BQ^2 = MC^2 - CQ^2$. Dalje je, $7^2 - x^2 = 13^2 - (a - x)^2$, $13^2 - y^2 = 17^2 - (a - y)^2$, odnosno $a^2 - 2ax = 120$; $a^2 - 2ay = 120$. Odavde je $a^2 - 2ax = a^2 - 2ay$; $x = y$. Dakle, $\triangle APM$ je jednakokraki i tačke A, M i C su kolinearne te važi
$AC = AM + MC = 24\ cm$, pa je $a\sqrt{2} = 24\ cm$ i slijedi $P = a^2 = 288\ cm^2$.

136. Jedan mali traktor uzore prvu njivu za 40 dana ($8 \cdot 5$ dana). Jedan veliki traktor uzore istu njivu za 15 dana ($5 \cdot 3$ dana). Jedan mali traktor za jedan dan uzore $\frac{1}{40}$ prve njive. Jedan veliki traktor za jedan dan uzore $\frac{1}{15}$ prve njive. Dva mala i tri velika traktora za jedan dan uzoru $\frac{1}{40} \cdot 2 + \frac{1}{15}$ prve njive, što iznosi $\frac{1}{4}$ te njive. Dakle, dva mala i tri velika traktora uzoru tu njivu za 4 dana. Druga njiva ima 3,5 puta veću površinu i 2 mala i 3 velika traktora će uzorati za 14 dana ($4 \cdot 3{,}5$ dana).

137. Za $x > 0$ je $|x| = x$, te je $x^2 + 1 = 1$; $x^2 = 0$; $x = 0$. Dakle, za $x > 0$, jednačina nema rješenja. Za $x < 0$ je $|x| = -x$, te je $-x^2 + 1 = -1$; $x = \sqrt{2}$ ili $x = -\sqrt{2}$. Dakle, za $x < 0$, rješenje jednačine je $x = -\sqrt{2}$.

138. a) Kako je $P(x) = ax^2 + bx + c$ i $P(0) = 35$; $P(1) = 24$; $P(2) = 15$, to važi $c = 35$, $a + b + c = 24$, $4a + 2b + c = 15$. Rješenja ovog sistema jednačina su $a = 1$, $b = -12$, $c = 35$.
b) $P(x) = x^2 - 12x + 35 = x^2 - 7x - 5x + 35 = x(x - 7) - 5(x - 7) = (x - 7)(x - 5)$. Za $x = 2k - 1$, gdje je k cijeli broj, važi $P(2k - 1) = (2k - 1 - 7) \cdot (2k - 1 - 5) = (2k - 8) \cdot (2k - 6) = 4 \cdot (k - 4) \cdot (k - 3)$. Uočimo da su $k - 4$ i $k - 3$ dva uzastopna cijela broja i jedan od njih je djeljiv sa 2. Dakle,
$4 \cdot (k - 4) \cdot (k - 3)$ je djeljiv sa 8 za cijeli broj k.

139. Kako je $a^2b^3c = 3^2 \cdot 2^7$ i $ab^2c^3 = 3 \cdot 2^7$, to važi $\frac{a^2b^3c}{ab^2c^3} = \frac{3^2 \cdot 2^7}{3 \cdot 2^7}$; $ab^2 = 3c^2$. Takođe važi $a^2b^3c = (ab)^2 \cdot bc = 3 \cdot 2^7$, te je, zbog $ab^2 = 3c^2$, $(3c^2)^2 \cdot bc = 3 \cdot 2^7$, odnosno $b \cdot c^5 = 2^7$. Iz $c =$ slijedi da je $c < 3$. Za $c = 1$, iz $b \cdot c^5 = 2^7$, slijedi $b = 2^7$. Dalje, iz $ab^2c^3 = 3 \cdot 2^7$, za $c = 1$ i $b = 2^7$, dobijamo da a nije prirodan broj. Za $c = 2$, iz $b \cdot c^5 = 2^7$ dobijamo $b = 4$. Najzad, za $c = 2$ i $b = 4$ iz jednakosti $ab^2c^3 = 3 \cdot 2^7$ dobijamo $a = 3$.

140. Neka su h_a, h_b, h_c visine koje redom pripadaju stranicama a, b, c trougla ABC. Kako je $h_a : h_b : h_c = 6 : 4 : 3$, to je $c : b : a = 6 : 4 : 3$.
Iz posljednje proporcije slijedi $c = 6k$, $b = 4k$, $a = 3k$, gdje je k prirodan broj. Kako je prema uslovima zadatka $a + b + c = 130$, to je $6k + 4k + 3k = 130$, tj. $k = 10$. Dalje dobijamo: $a = 30\, cm$, $b = 40\, cm$ i $c = 60\, cm$. Primijenom Heronovog obrasca za izračunavanje površine trougla, dobijamo:
$P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, te je
$P = \sqrt{75 \cdot (75-30) \cdot (75-40) \cdot (75-60)} = 225\sqrt{35}\, cm^2$.

141. Neka su P_1 i P_2 dijagonalni presjeci. Tada je, prema uslovima zadatka, $P_1 = d_1 \cdot H = 88\ cm^2$ i $P_2 = d_2 \cdot H = 66\ cm^2$. Kvadriranjem i sabiranjem ovih jednakosti dobijamo $H^2 \cdot \left({d_1}^2 + {d_2}^2\right) = 88^2 + 66^2 = 12\,100$. Za dijagonale osnove romba je $a^2 = \frac{{d_1}^2}{4} + \frac{{d_2}^2}{4}$, odnosno $4 \cdot a^2 = {d_1}^2 + {d_2}^2$. Kako je omotač prizme $M = 4 \cdot a \cdot H$, to iz $H^2 \cdot \left({d_1}^2 + {d_2}^2\right) = 12\,100$, pa je $2 \cdot a \cdot H = 110$. Dakle površina omotača prizme je $M = 2 \cdot (2 \cdot a \cdot H) = 2 \cdot 110 = 220\, cm^2$.

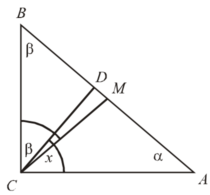
142. Dati broj ima 9+2·21=51 cifru desno od decimalnog zareza. Poslije precrtavanja 47 cifara ostaće 4 cifre desno od decimalnog zareza. Ne mogu sve četiri cifre bit 0, jer među decimalama su svega tri 0. Znači da je bar jedna cifra različita od 0, jer poslije treće 0 nema više decimala. Dakle, da bi broj bio najmanji potrebno je precrtati cifre tako da treća decimala u novom broju bude 1. Prema tome, precrtaćemo sve cifre osim onih koje se nalaze na 11, 22, 33. i 51. mjestu, a to su nule. Na taj način ćemo dobiti broj 0,0010.

143. Suva materija koja ne isparava, predstavlja 36% od 2,25 t, tj. $p = 36\%$. Kako je $G = 2{,}25\, t$, to je $P = \frac{G \cdot p}{100} = \frac{2{,}25 \cdot 36}{100} = 0{,}81\, t$. Ova količina poslije sušenja čini 54% od težine stabla (46% je voda). Dakle, $p_1 = 54\%$, $P_1 = 0{,}81\, t$, $G_1 = \frac{100 \cdot P_1}{p_1} = \frac{100 \cdot 0{,}81}{54} = 1{,}5\, t$. Težina stabla se smanjila za $2{,}25\, t - 1{,}5\, t = 0{,}75\, t$.

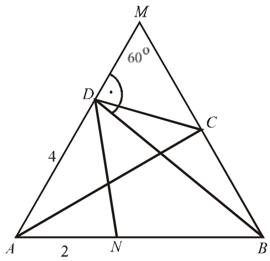
144. $A = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$; $B = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$, gdje su a,b, c, d, cifre, $a \neq 0$ i $d \neq 0$. Tada je, $A - B = 999(a-d) + 90(b-c) = 90$. Dalje zaključujemo da je $a = d = 1$, pa iz jednačine $999(a-d) + 90(b-c) = 90$, slijedi $b - c = 1$. Da bi broj A bio najveći mora biti $a = d = 1$. Prema uslovima zadatka zbir $b + c$ treba biti najmanji. Dakle, zbog $b - c = 1$, zbir $b + c = c + 1 + c = 2c + 1$ je najmanji za $c = 0$. Dalje, za $c = 0$, iz $b + c = 1$, dobijamo $b = 1$, paje $A = 9109$.

145. Od 900 trocifrenih brojeva 128 ih je djeljivo sa 7, $(900 = 7 \cdot 128 + 4)$. Trocifreni brojevi djeljivi sa 7 su: 105, 112, 119 ,…, 980, 987, 994. Neka je $A = 105 + 112 + 119 + \cdots + 980 + 987 + 994$. Takođe važi $A = 994 + 987 + 980 + \cdots + 119 + 112 + 105$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo $2A = (105 + 994) + (112 + 987) + (119 + 980) + \cdots + (980 + 119) + (987 + 112) + (984 + 105)$; $A = 64 \cdot 1099 = 70\,336$

146. Neka su u pravouglom $\triangle ABC$ ($\sphericalangle C$=90^0), CD visina, a CM težišna duž, sl. 52. Kako je $CM = MB$. to je $\triangle CMB$ jednakokraki te važi $\sphericalangle MBC = \sphericalangle MCB = \beta$ U pravouglom $\triangle ADC$ važi $\alpha + 90^0 + x = 180^0$, odnosno $x = 90^0 - \alpha$. Kako je $\alpha + \beta = 90^0$, to je $x = \beta$. Dakle, visina CD sa katetom AC gradi ugao β koji je jednak uglu koji gradi težišna duž CM sa katetom BC što je i trebalo dokazati.



Sl. 52



Sl. 53

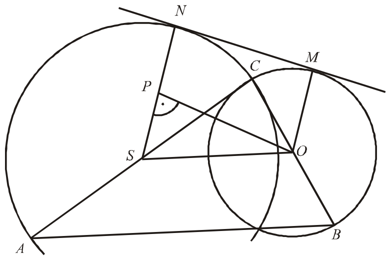
147. Broj 1 998 000 podijeljen sa 7·8·9=504 daje ostatak 144. Ako broj 1 998 000 uvećamo za $x = 504 - 144 = 360$ dobićemo broj 1 998 360 koji je djeljiv sa 504, tj. sa činiocima proizvoda 7·8·9. Takođe, broj 1 998 360+504=1 998 864 je djeljiv i sa 7 i sa 8 i sa 9. Dakle, 1 998 360 i 1 998 864 su traženi brojevi.

148. Kako je $999 < \overline{ROMB} < 1000$, to je $999 < (R + O + M + B)^4 < 1000$, odnosno $5 < R + O + M + B < 10$. Dakle četverocifreni brojevi $\overline{ROMB}$, mogu biti $6^4 = 1296$, $7^4 = 2401$, $8^4 = 4096$ i $9^4 = 65611$. Od ovih brojeva jedino broj 2401 zadovoljava uslove zadatka. Dakle, $\overline{ROMB} = 2401$.

149. Neka su a i b cijeli brojevi čiji je zbir djeljiv sa 10. Tada je $a + b = 10k$, gdje je k cijeli broj. Iz $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b) = 10k(a - b)$, to zaključujemo da je broj $a^2 - b^2$ djeljiv sa 10. Dakle, brojevi a^2 i b^2 se završavaju istom cifrom.

150. Produžimo stranice BC i AD do presjeka M, sl. 53. Trougao ABM je jednakostranični, stranice 6 cm. Stranice pravouglog trougla CDM su: $DM = 2\ cm$ i $CD = 2\sqrt{3}\ cm$. Površina četverougla je razlika površina trouglova ABM i CDM. Dakle, $P = \frac{6^2 \cdot \sqrt{3}}{4} - \frac{2\sqrt{3}}{2} = 7\sqrt{3}\ cm^2$. Neka je DN normala iz D na AB. Pravougli $\triangle AND$ je podudaran $\triangle MDC$, pa je $AN = 2\ cm$ i $DN = 2\sqrt{3}\ cm$. Primjenom Pitagorine teoreme na trouglove BDN i ACD slijedi: $BD = 2\sqrt{7}\ cm$, te je $AC = 2\sqrt{7}\ cm$.

151. U pravouglom $\triangle ABC$ su katete $BC = a$ i $AC = 3a$ i hipotenuza $AB = c$, pa je $c^2 = a^2 + b^2 = 10a^2$.



Sl. 54

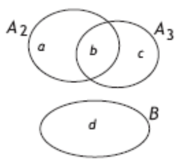
Neka su M i N dodirne tačke krugova sa zajedničkom tangentom, sl. 54, O i S centri krugova i p podnožje normale iz O na SN. Poluprečnici krugova su $OM = \frac{a}{2}$ i $SN = \frac{b}{2} = \frac{3a}{2}$, pa je $SP = SN - NP = SN - OM = a$. Duž OS je srednja linija $\triangle ABC$ i $OS = \frac{c}{2}$. Iz $\triangle OPS$ računamo: $OS^2 = OP^2 + SP^2$; $\left(\frac{c}{2}\right)^2 = \left(4\sqrt{6}\right)^2 + a^2$, jer je $OP = MN = 4\sqrt{6}\,cm$, $c^2 = 384 + a^2$, odnosno $10a^2 = 384 + 4a^2$, pa je $a = 8\,cm$, $b = 24\,cm$ i $c = 8\sqrt{10}\,cm$. Obim $\triangle ABC$: $O = \left(32 + 8\sqrt{10}\right)\,cm$.

152. Iz prve jednačine je $x = 2a + a$, a iz druge $x = \frac{3a-1}{2}$. Prema uslovima zadatka je $2 \leq 2a + 2 < 10$ i $2 \leq \frac{3a-1}{2} < 10$; tj. $0 \leq a < 4$ i $2 \leq \frac{3a-1}{2} < 10$, pa je $\frac{5}{3} \leq a < 7$.

153. Neka je A_2 skup brojeva djeljivih sa 2, A_3 skup brojeva djeljivih sa 3, a B skup svih brojeva koji nisu djeljivi ni sa 2 ni sa 3. Prikažimo te skupove Venovim dijagramom, sl. 55. Prema uslovima zadatka je:

$a)$ $c + d = \frac{1}{3}n$; $b)$ $a + d = \frac{2}{7}n$;
$c)$ $b = 427$; $d)$ $d = \frac{1}{5}n$.

Saberimo ove jednakosti: $(a + b + c + d) + 2d = \frac{1}{3}n + \frac{2}{7}n + 427 + \frac{1}{5}n$. Dalje, zbog $a + b + c + d = n$ i $d = \frac{1}{5}n$, slijedi $n = 735$.



Sl. 55

154. U ravni je dato 16 tačaka, koje ćemo označiti brojevima od 1 do 16. Odredimo prvo broj trouglova koji se mogu formirati od 16 tačaka od kojih nikoje tri nisu kolinearne. Prvo tjeme A_1 se formira iz skupa {1,2,3,...,16}, na 16 načina. Drugo tjeme A_2 se formira iz skupa {1,2,3,...,16}\{ A_1}, jer se A_1 ne može ponoviti, na 15 načina. Treće tjeme A_3 se formira iz skupa {1,2,3,...,16}\{A_1,A_2}, na 14 načina. Broj tako formiranih trouglova je $\frac{16\cdot 15\cdot 14}{6}=560$. Proizvod smo dijelili sa 6, jer svaki trougao smo brojali 6 puta (ABC, ACB, BCA, BAC, CAB, CBA). Kako na svakoj stranici ima po 4 trojke kolinearnih tačaka koje kao tačke ne određuju trouglove, to je datim tačkama određeno $560-4\cdot 4=544$ trouglova.

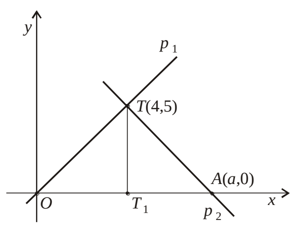
155. Jednačina prave p_1 koja prolazi kroz koordinatni početak je $y=kx$. Tačka $T(4{,}5)$, pripada toj pravoj i važi $k=\frac{5}{4}$. Jednačina prave p_1: $y=\frac{5}{4}x$. Neka prava p_2 siječe osu Ox u tački $A(a{,}0)$, sl. 56. Površina $\triangle\ OAT$ je $P_{OAT}=\frac{OA\cdot TT_1}{2}=\frac{|a|}{2}\cdot 5$; $\frac{|a|}{2}\cdot 5=20$, te je $|a|=8$, pa je $a=8$ ili $a=-8$ i koordinate tačke A su $(8{,}0)$ ili $(-8{,}0)$. Jednačina prave p_2 koja sadrži tačke $T(4{,}5)$ i $A(8{,}0)$ je $y=-\frac{5}{4}x+10$. Ako prava p_2 sadrži tačke $T(4{,}5)$ i $A(8{,}0)$ njena jednačina je $y=\frac{5}{12}x+\frac{10}{3}$.

156. Prema uslovima zadatka i podataka na sl. 57 važi:
1. $\sphericalangle 1=\sphericalangle 2$ (periferijski uglovi na jednakim kružnim lukovima)
2. $\sphericalangle 1$ je zajednički ugao za trouglove ABN i ABM.
3. Iz 1. i 2. slijedi $\triangle ABN\sim\triangle ABM$, te je $AB:AM=AN:AB$, odakle je $AB^2=AM\cdot AN$, $AB^2=25$, $AB=5\ cm$. Kako je $O_{ABC}=a+2b$ i $AB=b-5$, to je $a=6\ cm$. Iz pravouglog trougla ABA_1 dobije se $AA_1=h=4\ cm$. Površina trougla ABC: $P=\frac{a\cdot h}{2}=12\ cm^2$. Kako je $P=r\cdot s$, gdje je $s=(a+2b):2=16\ cm$, a r poluprečnik upisanog kruga to je $r=3{,}5\ cm$. Dakle, površina kruga upisanog u trougao ABC je $P_r=\frac{9}{4}\pi\ cm^2$.

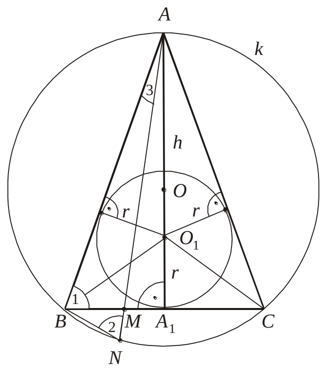
157. Prvo nalazimo $B\cup D=\{1,4,6,7,8\}$ i $A\cap C=\{2,5\}$. Iz uslova $S\cap(B\cup D)=\varnothing$, slijedi $S\subset\{2,3,5\}$, a iz $(A\cap C)\setminus S=\varnothing$ zaključujemo da $S\subset\{2,3,5\}$. Iz $\{3\}\setminus S=\{3\}$ slijedi $3\notin S$. Konačno je $S=\{2,5\}$.

158. Ako je u x redova zasađeno 30 voćki, onda je ukupno $30\ x$ voćki. Prema datom uslovu formiramo jednačinu: $35(x-3)=30\ x+50$. Odavde je $x=31$.

159. Iz uslova $x=\frac{2}{3}(90-x)$ slijedi $x=36^0$. Za njemu suplementan ugao važi $y=180^0-x=144^0$. Ugao x je četvrtina ugla $y=\frac{2}{3}(90^0-x)$.



Sl. 56



Sl. 57

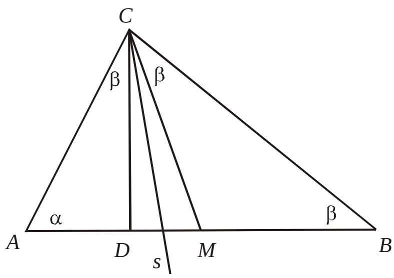
160. Traže se četverocifreni brojevi oblika $4 ** 2$ Kako je 4+2=6, a brojevi moraju biti djeljivi sa 9, to zbir dvije nepoznate cifre mora biti 3 ili 12. Te uslove zadovoljavaju sljedeći brojevi: 4032, 4302, 4122, 4212, 4392, 4932, 4482, 4842, 4572, 4752 i 4662. Ima ih svega 11.

161. Prva cifra može biti 2, 4, 6 ili 8. Dakle, imamo 4 mogućnosti. Druga cifra može biti 2, 3 ili 7, opet imamo 4 mogućnosti; za treću cifru možemo uzeti neku od 5 neparnih cifara, a za četvrtu 4, 6, 8 ili 9, dakle 4 mogućnosti. Traženih brojeva ima ukupno: 4·4·5·4=320.

162. Rastavimo 140 na proste činioce: 140=2·2·5·7. Očigledno, jednocifreni imenioci traženih razlomaka mogu biti: 4, 5 i 7. Imamo uslov: $\frac{a}{4}+\frac{b}{5}+\frac{c}{7}=\frac{199}{140}$, odnosno $\frac{35a+28b+20c}{140}=\frac{199}{140}$. Dakle, prirodni brojevi a, b i c moraju zadovoljavati uslov $35a+28b+20c=199$. Slijedi da je a neparan broj i a<5, b<6, c<7. Broj $35a$ se završava cifrom 5, i $20c$ cifrom 0, pa se $28b$ mora završavati cifrom 4. Dalje slijedi da je b=3. Tada je $35a+20c=115$, pa mora biti a=1, jer je već 35·3=105. Konačno je c=4, pa je $\frac{1}{4}+\frac{3}{5}+\frac{4}{7}=\frac{199}{140}$.

163. Ako je posao završen za šest dana, onda je prvi radnik uradio $\frac{6}{10}=\frac{3}{5}$ posla. Drugi radnik je za dva dana završio dvije petine posla. Ako mu za cijeli posao treba x dana, onda on za jedan dan završi $\frac{1}{x}$ dio, pa iz jednačine $\frac{2}{x}=\frac{2}{5}$, dobijamo $x=5$ dana.

164. Neka je CD hipotenuzina visina i CM težišna duž, sl. 58. Tačka M je centar opisanog kruga i $CM=MB$, pa je $\sphericalangle BCM=\beta$. U pravouglom $\triangle ACD$ je $\sphericalangle ACD=90^0-\alpha=\beta$. Dakle, simetrala pravog ugla ACB polovi ugao između visine i težišne duži, pa je traženi ugao 16^0.



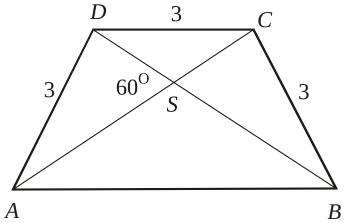
Sl. 58

165. Oba trocifrena broja su oblika $*75**$ ili $*70$ i zbir cifara im je djeljiv sa 9. Dakle, to mogu biti samo brojevi 675 i 270. Traži se broj kod koga je prvi broj manji, pa je broj telefona 270 675.

166. Tranformišemo dati polinom: $(x^2+4x+4)+y^2+(z^2-10z+25)+1970=(x+2)^2+y^2+(7-5)^2\geq 0$, jer kvadrati brojeva su veći ili jednaki nuli.

Odgovarajuće vrijednosti promjenljive su: $x = -2$, $y = 0$ i $z = 5$.

167. Polazeći od formule za površinu pravouglog trougla, kome je c hipotenuza i h odgovarajuća visina, imamo: $a{\cdot}b{=}c{\cdot}h$, odakle je $a^2 \cdot b^2 = c^2 \cdot h^2$ ili $\frac{1}{h^2} = \frac{c^2}{a^2 \cdot b^2}$. Kako je $c^2 = a^2 \cdot b^2$, dobijamo: $\frac{1}{h^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{a^2}{a^2 \cdot b^2} + \frac{b^2}{a^2 \cdot b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$

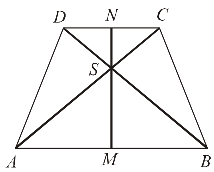


Sl. 59

168. Neka je S presječna tačka dijagonala, sl. 59. Lako se dokazuje da su trouglovi SCD i SAB jedanakokraki, i kako je $\sphericalangle ACD = 30^0 = \sphericalangle \mathrm{CAD} = \sphericalangle \mathrm{ABD}$. Ali, i $\triangle ACD$ je jednakokraki, jer je $AD = CD = 3\ cm$, pa je $\sphericalangle \mathrm{DAC} = \sphericalangle ACD = 30^0$. Slijedi je $\sphericalangle ADB = 90^0$, pa je $\triangle ABD$ polovina jednakostraničnog trougla te je $AB = 6\ cm$ i $BD = 3\sqrt{3}\ cm$.

169. Kako je $a < b$. to je $a - b < 0$ i $\frac{a+b}{a-b} < 0$. Iz datog uslova dobijamo: $2a^2 + 4ab + 2b^2 = 9ab$ i $2a^2 - 4ab + 2b^2 = ab$; $(a+b)^2 = \frac{9ab}{2}$ i $(a-b)^2 = \frac{ab}{2}$. Dalje slijedi $a + b = 3\sqrt{\frac{ab}{2}}$ i $a - b = -\sqrt{\frac{ab}{2}}$, (zbog $a - b < 0$), pa je $\frac{a+b}{a-b} = -3$.

170. Neka je S presječna tačka dijagonala osnova i NM visina trapeza, sl. 60. Prema Talesovoj teoremi tačka S dijeli visinu MN=9 cm na odsječke MS i SN tako da je $MS : SN = AB : CD$ = 16 : 8 = 2 : 1. Dakle, SM=6 cm i SN=3 cm. Iz pravouglog $\triangle SDN$, gdje je $DN = \frac{CD}{2} = 4\ cm$, dobijamo SD=5 cm=SC. Iz pravouglog $\triangle CVS$ računamo: $SV^2 = CV^2 - SC^2 = 13^2 - 5^2 = 144$; $SV = 12\ cm$. Zapremina piramide: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{AB+CD}{2} \cdot MN \cdot SV = 432\ cm^2$.



Sl. 60

171. Za $n > 2$ zbir kvadrata pet uzastopnih prirodnih brojeva možemo izraziti kao: $(n-2)^2 + (n-1)^2 + n^2 + (n+1)^2 + (n+2)^2 = 5n^2 + 10 = 5(n^2 + 2)$. Očigledno ovaj zbir je djeljiv sa 5, pa bi morao biti djeljiv sa 25, ako predstavlja kvadrat prirodnog broja. Treba da $(n^2 + 2)$ bude djeljivo sa 5, odnosno da posljednja cifra broja (n^2+2) bude 0 ili 5. To nije moguće, jer ne postoji broj n, takav da se n^2 završava cifrom 8 ili 3. Time je tvrđenje dokazano.

172. Kako je $2x^2-4xy-xy+2y^2=2x(x-2y)-y(x-2y)$, to važi $(x-2y)(2x-y)=5$, što daje sljedeće mogućnosti:

$$\begin{matrix} x-2y=1 \\ 2x-y=5 \end{matrix} \quad \text{ili} \quad \begin{matrix} x-2y=5 \\ 2x-y=1 \end{matrix} \quad \text{ili} \quad \begin{matrix} x-2y=-1 \\ 2x-y=-5 \end{matrix} \quad \text{ili} \quad \begin{matrix} x-2y=-5 \\ 2x-y=-1 \end{matrix}$$

Rješavanjem ovih sistema jednačina dobijemo tražene parove:

(3,1), (−1,−3), (−3,−1) i (1,3).

173. Trećina od 51210 je 17070, a dvije trećine iznose 34140 dinara. Trgovac je ovako pazario: na 34140 dinara je zaradio 34140:20=1707 dinara, a na 17070 dinara izgubio 17070:30=569 dinara. Zaradio je 1707−569=1138 dinara.

174. Broj b treba da bude takav da najmanji zajednički sadržalac za b i 30 bude broj 30. Dakle, može biti b=5 ili b=15, ili b=20, ili b=30. Neposrednom provjerom utvrdimo da je b=15 jedino rješenje. Tada je a=1.

175. Prema sl. 61. vidimo da iz datog uslova, BS=5AS, zbog CS=AS, slijedi da je BC=2AC. Iz uslova BC–AC=2 cm, slijedi AC=2 cm i BC=4 cm, pa je AB=6 cm.

Sl. 61

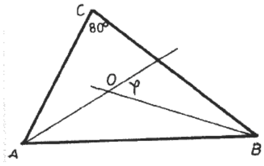
176. Broj koji pri dijeljenju sa 200 ili pri dijeljenju sa 240 daje ostatak 50 je broj oblika $s\cdot k+50$, gdje je s najmanji zajednički sadržalac za brojeve 200 i 240, a k je prirodan broj. Budući da je $s=1200$, traženi broj je: $x=1200k+50$ i $3000<x<4000$. Odavde je $k=3$, što znači da je naš učenik imao 3650 dinara.

177. Ako je Dejan imao x dinara, Željko je imao $(900-x)$ dinara. Prema zadatku je $\frac{3}{8}x+\frac{3}{10}(900-x)=300$, pa je $x=400$. Dejan je imao 400, a Željko 500 dinara.

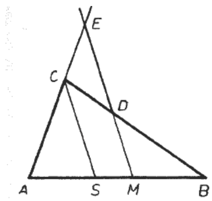
178. Moguće vrijednosti za a su: 3, 4, 6, 7 i 8. (Nije moguće $a=1$ ni $a=2$, jer je desna strana jednakosti manja od 1,5. Za $a=5$ ili $a=9$, nije moguće svesti na imenilac lijeve strane na 56). Za $a=3$ imamo uslov: $\frac{3}{8}+\frac{b}{7}=\frac{56+8b}{56}=\frac{60+c}{56}$. Odavde je $56+8b=60+c$, odnosno $8b=4+c$. Jedino rješenje, koje podrazumijeva jednocifrene brojeve b i c je $b=1$ i $c=4$. Samo u slučaju $a=8$ imamo dva rješenja: iz $\frac{3}{8}+\frac{b}{7}=\frac{21+8b}{56}=\frac{60+c}{56}$, tj. iz je $21+8b=60+c$, ili $8b=39+c$, dobijamo $b=5$, $c=1$, ili $b=6$, $c=9$. Slično odredimo i ostala rješenja: (3,1,4), (4,3,6), (6,5,8), (7,5,4), (8,5,1) i (8,6,9).

179. Ako je O tačka u kojoj se sijeku simetrale uglova α i β, sl. 62, i $\gamma=90^0$, tada traženi ugao predstavlja spoljašnji ili unutrašnji ugao kod tjemena O u $\triangle AOB$. Kako je $\sphericalangle ABO=\frac{\beta}{2}$ i $\sphericalangle BAO=\frac{\alpha}{2}$. Ako je ugao φ spoljašnji ugao $\triangle AOB$, onda je $\varphi=\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=\frac{1}{2}(180^0-\gamma)=\frac{1}{2}(180^0-80^0)=50^0$.

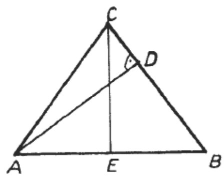
180. Neka je CS simetrala ugla ACB, sl. 63. Dokazaćemo da je $\triangle CDE$ jednakokraki ako je M, $M{\neq}S$, bilo koja tačka duži AB. U slučaju sa slike imamo jednake uglove SCD i CDE (naizmjenični) i drugi par: $\sphericalangle ACS = \sphericalangle AED$ (saglasni). Budući da je $\sphericalangle CDE = \sphericalangle CDE$, trougao CDE je jednakokraki.



Sl. 62



Sl. 63



Sl. 64

181. Sređivanjem dobijamo da je dati zbir:
$4n^2 + 12n + 14 = (4n^2 + 12n + 9) + 5 = (2n + 3)^2 + 5$. Zaključujemo da cifra jedinica broja $2n + 3$ mora biti 5, tj. $2n + 3 = 10k + 5$. Odavde je $n = 5k + 2$, tj. svaki prirodan broj koji pri dijeljenju sa 5 daje ostatak 1, jeste rješenje zadatka. To su dakle brojevi 1, 6, 11, 16,⋯.

182. Ako je duž $AB = 5\ cm$ osnovica, $BC = 5\ cm$ krak i $AD = 4\ cm$ visina, sl. 64. Primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle ABD$ dobijamo:
$AB^2 - AD^2 = BD^2$; $BD = 3\ cm$. Sada iz $b^2 - (b - BD)^2 = AD^2$ slijedi: $b = \frac{25}{6}\ cm$, pa je površina $P = \frac{1}{2} \cdot b \cdot AD = \frac{25}{6}\ cm^2$.

183. Kako je $\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)}$, to se dati izraz u zagradi može transformisati:
$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{1997} - \frac{1}{1998} + \frac{1}{1998} - \frac{1}{1999} = 1 - \frac{1}{1999} = \frac{1988}{1999}$
Poslije sređivanja dobijamo jednačinu
$\frac{1988}{1999} \cdot |x - 1| = 23 \cdot \frac{1988}{1999}$, odnosno $|x - 1| = 23$, pa je $x - 1 = 23$ ili $x - 1 = -23$ i rješenja jednačine su $x = 24$ ili $x = -22$. Površina romba ne može biti negativna, pa je $P = 24\ cm^2$. Sada iz $\frac{d_1 \cdot d_2}{2} = 24$, za $d_1 = 6\ cm$. dobijamo $d_2 = 8\ cm$. Dalje, primjenom Pitagorine teoreme, izračunamo stranicu romba: $a = 5\ cm$.

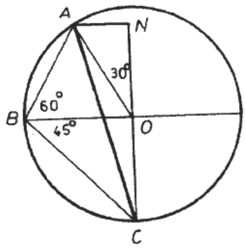
184. $x^{10} - x^5 + x^2 - x + 1 = \left(x^{10} - x^5 + \frac{1}{4}\right) + \left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \frac{1}{2} = \left(x^5 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0.$

185. Kako je $1 + 2 + 3 + \cdots + (n + 2) + (n - 1) + n = n(n + 1): 2$, to, prema uslovima zadatka važi $n(n + 1) = 2 \cdot n \cdot (n+1) = 2 \cdot \overline{aaa} = 2 \cdot \overline{aaa} = 2 \cdot a \cdot 111 = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a$, gdje je a prirodan broj manji od 10. Dakle, $n \cdot (n + 1) = 2 \cdot 3 \cdot 37 \cdot a$, pa kako su n i (n+1) dva uzastopna prirodna broja, jedino rješenje je $a = 6$, pa je $n \cdot (n + 1) = 36 \cdot 37 = 36 \cdot 37$, a $n = 36$.

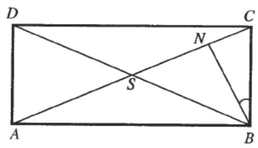
186. Neka su d_1 i d_2 dijagonale i a ivica baze, a H visina paralelopipeda. Tada je $d_1 \cdot H = P_1$ i $d_{21} \cdot H = P_2$, pa je $d_1 = \frac{P_1}{H}$ i $d_2 = \frac{P_2}{H}$. Primjenjujući Pitagorinu teoremu dobijamo da je: $a = \sqrt{\frac{{d_1}^2}{4} + \frac{{d_2}^2}{4}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{{P_1}^2}{H^2} + \frac{{P_2}^2}{H^2}} = \frac{1}{2H} \cdot \sqrt{{P_1}^2 + {P_2}^2}$. Površina omotača je $M = 4 \cdot a \cdot H = 2 \cdot \sqrt{P_1{}^2 + P_2{}^2}$.

187. Uočimo: $(a-1)(a-4) = a^2 - 5a + 4$ i $(a-2)(a-3) = a^2 - 5a + 6$. Neka je $a^2 - 5a + 4 = k$. Tada je $(a-1)(a-2)(a-3)(a-4) + 1 = (a^2 - 5a + 4) \cdot (a^2 - 5a + 6) + 1 = k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2 \geq 0$.

188. Prema uslovu je jasno da je $\triangle\, OAB$ jednakostraničan, sl. 65. a $\triangle\, BOC$ je pravougli jednakokraki. Neka je N podnožje normale iz A na pravu CO. Tada je u pravouglom $\triangle\, AON$ ugao kod tjemena O od 30^0 i $AO = 6\,cm$. Slijedi, $AN = 3\,cm$ i $ON = 3\sqrt{3}\,cm$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle\, ACN$:
$AC^2 = (6 + 3\sqrt{3})^2 + 3^2 = 72 + 36\sqrt{3} = 36(2 + \sqrt{3})$; $AC = 6 \cdot \sqrt{2 + \sqrt{3}}\,cm$.



Sl. 65



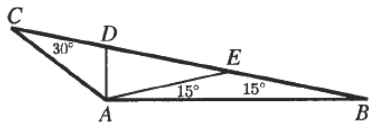
Sl. 66

189. Ako Milanu treba x dana da uradi cijeli posao, onda bi Marku trebalo $(x + 5)$ dana. Dalje, prema uslovima zadatka je $\frac{3}{5}x + \frac{3}{5}(x + 5) = 12$, odakle je $x = 10$. Za jedan dan Milan i Marko bi uradili $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} = \frac{1}{6}$ posla, što znači da bi zajedno cijeli posao uradili za 6 dana.

190. Neka su $x, y, z \in \mathrm{N}$ traženi brojevi. Tada je $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Jedno rješenje je $x = y = z = 3$. Ako su x, y, z različiti brojevi, onda ne mogu svi biti veći od 3. Dakle, jedan par mora biti broj 2. Neka je $x = 2$. Tada je diofantsku jednačinu $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Njena rješenja nalazimo jednostavno: $y = z = 4$, ili $y = 3$, $z = 6$. Sva rješenja zadatka su permutacije trojki (2,4,4) i (2,3,6), kao i trojka (3,3,3); dakle 10 rješenja.

191. Označimo sa S presječnu tačku dijagonala i sa N podnožje normale iz B na dijagonalu AC, sl. 66. Po pretpostavci u pravouglom $\triangle\, BCN$ je $\sphericalangle CBN = \frac{90^0}{4} = 22^0 30'$, pa je $\sphericalangle BCN = 90^0 - 22^0 30' = 67^0 30'$. Dijagonale se polove, $SB = SC$, pa je $\sphericalangle SBC = \sphericalangle BCS = 67^0 30'$, Dakle, $\sphericalangle SBN = \sphericalangle SBC - \sphericalangle NBC = 67^0 30' - 22^0 30' = 45^0$.

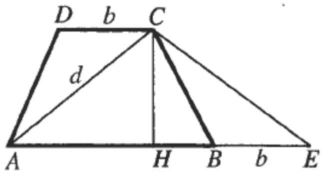
192. Trougao ABD je pravougli. Neka je E središte hipotenuze BD, sl. 67. Tačka E je centar opisanog kruga $\triangle\, ABD$, pa je $BE = DE = AE$ i $\sphericalangle BAE = \sphericalangle ABE = 15^0$. Spoljašnji ugao $\triangle\, ABE$ je $\sphericalangle AED = 30^0$, pa je $\triangle\, ACE$ jednakokraki i $AC = AE$. Otuda slijedi traženi zaključak $BD = 2AE = 2AC$.



Sl. 67

193. Kako je $a^2 + d^2 - 2b(a + c - b) + 2c(c - d) = (a^2 - 2ab + b^2) + (b^2 - 2bc + c^2) + (c^2 - 2cd + d^2) = (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - d)^2$, to je najmanja vrijednost ovog izraza jednaka nuli, ako je $a - b = b - c = c - d$, pa je traženi uslov $a = b = c = d$.

194. Neka je E tačka na produžetku osnovice AB, takva da je $BE = CD = b$, sl. 68.



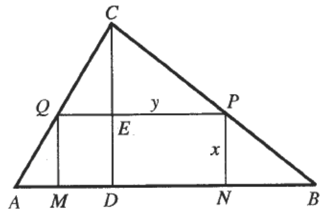
Sl. 68

Tada je $AE = a + b$, a trougao ACE je jednakokraki, sa traženom dijago-nalom kao krakom: $AC = d$. Podnožje H visine CH je središte duži AE, pa je: $AH = \frac{a+b}{2} = 4\,cm$. Iz pravouglog $\triangle ACH$, sa katetama $AH = 4\,dm$ i $CH = 3\,dm$, dobijamo $d = AC = 5\,dm$.

195. Neka su a, b, c cjelobrojne dužine stranica pravouglog trougla, pri čemu je $c^2 = a^2 + b^2$. Pretpostavimo li da brojevi a i b nisu djeljivi sa 5, tj. da su oblika $5m \pm 1$ ili $5n \pm 2$. Tada su a^2 i b^2 oblika $5k + 1$ ili $5k + 4$. Pretpostvimo da su oba broja oblika $5k + 1$ ili oba oblika $5k + 4$. (U protivnom bi bilo:
$a^2 + b^2 = 5k + 1 + 5p + 4 = 5(k + p + 1) = c^2$, pa bi broj c bio djeljiv sa 5, a c^2 bi bio oblika $c^2 = a^2 + b^2 = 5p + 2$ ili $c^2 = a^2 + b^2 = 5q + 4$, što nije moguće; Naime, moralo bi biti $c^2 = 5p + 1$ ili $c^2 = 5q + 4$. Dakle, nije moguće da sva tri broja nisu djeljivi sa 5.

196. Kako je $x^2\big((x^2 + 2x^3 + x^2) + (x^2 + x + 1)\big) = x(x^2(x + 1)^2 + (x + 1)^2)$
$= x((x + 1)^2(x^2 + 1))$, to je znak ovog izraza je isti kao znak prvog činioca, broja x, jer izrazi $(x + 1)^2$ i $(x^2 + 1)$ su nenegativni.

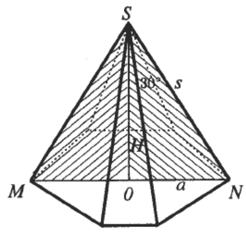
197. Označimo traženi broj sa $\overline{abcd}$, a sa x broj koji nije veći ni od jedne cifre traženog broja. Po uslovu je $\overline{abcd} = m^2$ i $\overline{a_1b_1c_1d_1} = n^2$, gdje je $a_1 = a - x$, $b_1 = b - x$, $c_1 = c - x$, $d_1 = d - x$. Tada je $\overline{abcd} - \overline{a_1b_1c_1d_1} = 1111 \cdot x = m^2 - n^2$, pa je $(m - n)(m + n)11 \cdot 101 \cdot x$. Brojevi m^2 i n^2 su četverocifreni, pa je $32 \leq m \leq 99$ i $32 \leq n \leq 99$. Slijedi da je $0 < m - n < 67$ i $64 < m + n < 198$. Dalje zaključujemo da je $m - n = 11 \cdot x$ i $m + n = 101$. Zbog neparnosti broja $(m + n)$ slijedi da je i $(m - n)$ neparan, pa je $x = 1$ ili $x = 3$ ili $x = 5$. Dalje nalazimo: za $x = 1$ je $m = 56$ i $n = 45$, tj. $3236 = 56^2$ i $2025 = 45^2$; za $x = 3$ je $m = 67$ i $n = 34$, tj. $4489 = 67^2$ i $1156 = 34^2$. Za $x = 5$ nema rješenja za m i n.

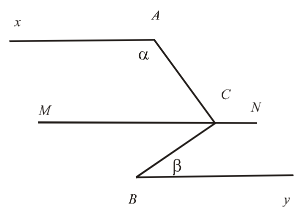


Sl. 69

198. Ako je $MNPQ$ upisani pravougaonik, sl. 69, tada je $PQ \parallel AB$, pa su trouglovi ABC i QPC slični. Otuda je $AB{:}PQ = CD{:}CE$; $6{:}y = 4{:}(4-x)$, pa je $y = 6 - \frac{3}{2}x$. Površina pravougaonika je $P = x \cdot y$, pa je $P = 6x - \frac{3}{2}x^2$; $6P = 36x - 9x^2 = 9(4x - x^2) = 9(4-(2-x)^2))$; $P = \frac{3}{2}(4-(2-x)^2)$. Vrijednost od P biće najveća za $x = 2$, pa je, za x=2, 6 : y = 4 : (4 – 2); $y = 3$ i maksimalna površina je $P = 6$.

199. Primijetimo da je $(x+y)(x+4y) = x^2 + 5xy + 4y^2$ i $(x+2y)(x+3y) = x^2 + 5xy + 6y^2$. Neka je $x^2 + 5xy + 4y^2 = t$. Tada dobijamo $t(t+2y^2) + y^4 = t^2 + 2ty^2 + y^4 = (t+y^2)^2 \geq 0$.





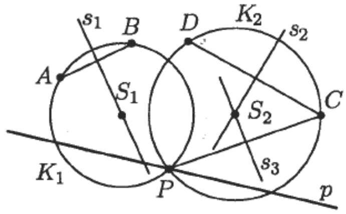
Sl. 70 Sl. 71

200. Iz zbira unutrašnjih uglova osnove $(n-2)\cdot 180^0 = 720^0$, dobijamo da je osnova pravilan šestougao, $n = 6$, sl. 70. Iz uslova da je ugao između bočne ivice i visine 60^0, pa iz ΔSON slijedi $a = \frac{s}{2}$ i $H = \frac{s\sqrt{3}}{2}$. Dakle, $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} \cdot H = \frac{1}{6}s^3$.

201. Iz datog količnika dobijamo jednakost: $n + 100 = 23k + 17$, gdje $k \in N$. Odavde je $n = 23k + 17 - 100 = 23k - 83 = 23k - 92 + 9 = 23(k-4) + 9$. Dakle, ostatak je 9.

202. Konstruišemo pravu MN,koja sadrži tačku C, paralelnu sa Ax, sl. 71. Tada je $\sphericalangle MCB = \beta$, naizmjenični uglovi. Slično se dobije $\sphericalangle ACM = 180^0 - \alpha = 70^0$. Prema tome je $\sphericalangle ACB = \sphericalangle ACM + \sphericalangle MCB = 70^0 + 32^0 = 102^0$

203. Centar kruga K_1 pripada simetrali s_1 duži AB, a centar kruga K_2 je na simetrali s_2 duži CD. Zadatak ima beskonačno mnogo rješenja. Jedno od njih vidimo na sl. 72. Na simetrali s_1 izaberemo tačku S_1, tako da krug poluprečnika S_1AA siječe pravu p u tački P. To je krug K_1. Centar kuga K_2 je onda određen kao presječna tačka simetrale s_3 duži CP i prave s_2.

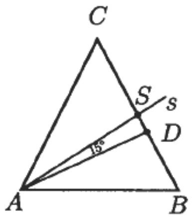


Sl. 72

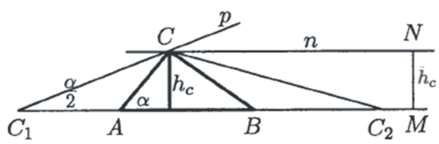
204. Pretpostavimo da je x ukupan broj učenika u odjeljenju. Tada važi jednakost: $\frac{17}{18}x - \frac{17}{18}x = 1$, pa je $x = 36$. U odjeljenju ima 36 učenika.

205. Iz date jednakosti je $a = 5$, pa je $\frac{14+5b}{35} = \frac{30+c}{35}$, odnosno $14 + 5b = 30 + c$. Slijedi da je $5b = 16 + c = 15 + (c + 1)$, odakle je $b = 3 + \frac{c+1}{5}$. Moguće je $c = 4$, pa je $b = 4$, ili $c = 9$, pa je $b = 5$. Dakle, postoje dva različita rješenja: $a = 5$, $b = 4$, $c = 4$; $a = 5$, $b = 5$, $c = 9$.

206. Neka je S presječna tačka simetrale i stranice BC, sl. 73. U pravouglom trouglu ADS je $\sphericalangle BAC = \sphericalangle ABC = \alpha$. Tada za $\triangle\ ABS$ važi:$\frac{\alpha}{2} + \alpha + 75^0 = 180^0$, pa je $\alpha = 70^0$, i $\sphericalangle ACB = 180^0 - 2\alpha = 40^0$.



Sl. 73



Sl. 74

207. Prema sl. 74. na kojoj je $AC_1 = AC$ i $BC_2 = BC$, $C_1C_2 = 12\ cm$, tj. C_1C_2 je obim $\triangle\ ABC$. U jednakokrakom $\triangle\ ACC_1$ ugao α je spoljašnji naspram osnovice CC_1, pa je $\sphericalangle CC_1A = \frac{\alpha}{2} = 30^0$. Na osnovu toga se lako dobija konstrukcija:

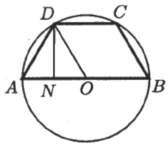
1) Konstruišemo duž $C_1C_2 = 12\ cm$. 2) Odredimo polupravu C_1p koja sa pravom CC_1 gradi ugao 30^0. 3) Konstruišemo normalu $CD = h_c$ i kroz N pravu n paralelnu sa C_1C_2. Tako dobijemo tačku C. Simetrale duži CC_1 i CC_2 sijeku C_1C_2 u tačkama A i B.

208. Neka je rastojanje $AB = k\ km$ i prosječna brzina $v\ km/h$. Tada imamo jednakost $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{24}{v}$, što znači da je ukupno vrijeme $v = \frac{x}{v}$ jednako zbiru vremena putovanja od A do B, to je $t_1 = \frac{x}{4}$, i vremena putovanja od B do A, to je $t_1 = \frac{x}{6}$. Iz ove jednakosti je $\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{v}$; pa je $v = 4{,}8\ km/h$.

209. Iz datog uslova je $\frac{c^2}{(a+b)^2} = \frac{1}{2}$, te je $a^2 + 2ab + b^2 = 2c^2$. Kako je $c^2 = a^2 + b^2$, to slijedi $a^2 + b^2 - a^2 - 2ab - b^2 = 0$; je $a^2 - 2ab + b^2 = 0$; $(a-b)^2 = 0$. Slijedi da je $a = b = 0$. Trougao je jednakokraki pravougli, oštri uglovi su po 45^0.

210. Traženi broj je $\overline{xxyy}$ i važi $\overline{xxyy} - \left(\overline{ab}\right)^2$; $1000x + 100x + 10y + y = \left(\overline{ab}\right)^2$. Zaključujemo da je $\overline{ab}$ djeljivo sa 11, tj. $a = b$, pa su traženi brojevi: 11^2 ili 22^2 ili 33^2,..., 99^2. Jedino rješenje zadatka je broj $7744 = 88^2$.

211. Neka je O centar opisanog kruga i DN visina, sl. 75. Prema uslovima je $OA = OB = OD = 5\ cm$ i $DN = 4\ cm$. Iz $\triangle\ ODN$ dobijamo $ON^2 = OD^2 - DN^2$, pa je $ON = 3\ cm$. Slijedi, $CD = 6\ cm$, pa je površina trapeza $P = \frac{(AB+CD)\cdot DN}{2} = 32\ cm^2$.



Sl. 75

212. Neka je $p=n$, $q=n+1$ i $t=n(n+1)$. Tada je $p^2+q^2+t^2=n^2+(n+1)^2+n^2(n+1)^2=$ $n^2+n^2+2n+1+n^4+2n^3+n^2$. Ovaj izraz možemo transformisati tako da dobijemo potpuni kvadrat, što je i trebalo dokazati: $p^2+q^2+t^2=(n^4+2n^3+n^2)+(2n^2+2n)+1=$ $(n^2+n)^2+2(n^2+n)+1=(n^2+n+1)^2$.

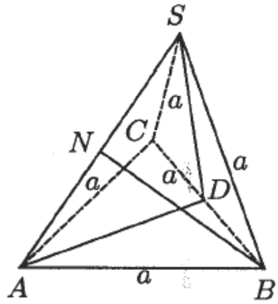
213. $\overline{abcd} + \overline{abc} + \overline{ab} + a = 1000a + 100b + 10c + d = 4321$, te je $1111a + 111b$ $+11c + d = 4321$.Kako je $1111 \cdot 2 + 999 + 99 + 9 = 3329 < 4321$, zaključujemo da je $2 < a < 4$, odnosno $a = 3$. Za $a = 3$ dobijamo $111b + 11c + d = 988$. Slično, prethodnom razmatranju zaključujemo da je $7 < b < 9$, tj. $b = 8$. Sada iz $11c + d = 100$ dobijamo $c = 9$ i $d = 1$. Tražene cifre su $a = 3$, $b = 8$, $c = 9$, $d = 1$, pa je četverocifreni broj 3891.

214. a) Ako tačka $A(-3{,}7)$ pripada grafiku funkcije, onda vrijednost $x=-3$, $y=7$ zadovoljavaju datu jednakost, pa je $7=(m^2-2)\cdot(-3)+4m^2-8$. Odavde je $m^2=9$, pa je $m=3$ ili $m=-3$. b) (Za $m = \sqrt{3}$ funkcija ima oblik $y=x+4$. Njen grafik sa koordinatnim osama gradi jednakokraki pravougli trougao katete dužine 4, a traženo odstojanje h je hipotenuzina visina $h = \frac{c}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{2} = 2\sqrt{2}$.

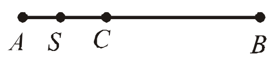
215. Transformisanjem date jednakosti dobijamo: $(xy-3y)+(7x-21)=4$, odnosno $y(x-3)+7(x-3)=4$ i konačno $(x-3)(y+7)=4$. Ovo je moguće ako je $x-3=1$ i $y+7=4$, ili $x-3=-1$ i $y+7=-4$, ili $x-3=2$ i $y+7=2$, odnosno $x-3=-2$ i $y+7=-2$, ili $x-3=4$ i $y+7=1$, odnosno $x-3=-4$ i $y+7=-1$. Rješenja ovih sistema jednačina su parovi cijelih brojeva: $(4,-3)$, $(2,-11)$, $(5,-5)$, $(1,-9)$, $(7,-6)$, $(-1,-8)$.

216. Ako je osnova piramide jednakostraničan $\triangle ABC$, sl. 76, visina je $SD = \frac{a\sqrt{3}}{2}$, pa je zapremina piramide: $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{8}$. Površinu obrazuju dva jednakostranična trougla, $\triangle ABC$ i $\triangle SBC$ i dva podudarna jednakokraka trougla, $\triangle ABS$ i $\triangle ACS$. Njihova zajednička osnovica AS je hipotenuza jednakokrakog $\triangle ADS$, pa je $AS = AD\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle ABS$:
$BN^2 = AB^2 - \left(\frac{AS}{2}\right)^2 = a^2 - \frac{3a^2}{8} = \frac{5a^2}{8}$, pa je $BN = \frac{a\sqrt{5}}{\sqrt{8}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$. Površina piramide: $P = 2P_{ABC} + 2P_{ABC} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a^2\sqrt{15}}{4} = \frac{a^2\sqrt{15}}{4}\left(2\sqrt{3} + \sqrt{15}\right)$.

217. Neka su x i y dva trocifrena broja, takva da je $(x - y)$) djeljivo sa 7. Tada je $x - y = 7k$, a dopisivanjem y iza x dobijamo dati šestocifreni broj, tj. $n = \overline{xy}$. Posljednju jednakost možemo napisati u obliku: $n = 1000x + y$. Tada je $n + x = 1001x + y$ ili $n = 1001x + y - x$. Odavde slijedi da je $n = 1001x - (x - y)$; $n = 1001x - 7k$; $n = 7 \cdot 143x - 7k$. Dakle, šestocifreni broj je djeljiv sa 7.



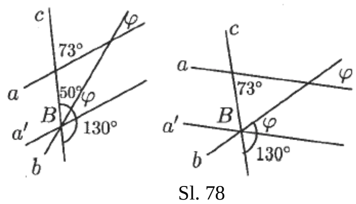
Sl. 76



Sl. 77

218. Neka je S središte duži AC, sl. 77 i neka je AS=x. Tada je SB=5x, pa je AC=2x i AB=6x, odnosno BC=4x. Iz datog uslova BC–AC=1cm, tj. 4x–2x=1 cm ili 2x=1cm, slijedi da je AB=3 cm.

219. Prave a i b obrazuju različite uglove sa pravom c i dva data ugla određuju ili par suprotnih ili par saglasnih uglova. Neka je B presječna tačka prave b sa c i a' prava kroz B paralelna sa a. Traženi ugao φ izračunavamo u prvom slučaju, sl. 78 lijevo, kao: $\varphi + 50^0 = 73^0$, odnosno: $\varphi = 23^0$, a u drugom slučaju, sl. 78 desno, kako je $73^0 = 130^0 - \varphi$, odakle je $\varphi = 57^0$.

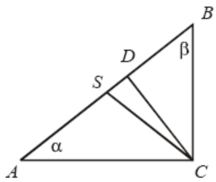


Sl. 78

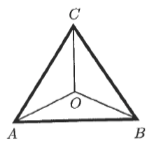
220. Neka je bilo a ljudi, b žena i c djece. Tada su postavljeni uslovi: $a+b+c=12$ i $2a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}=12$. Drugu jednakost pomnožimo sa 4: $8a+2b+c=4$. Odavde zaključujemo da je a≤5 i c je paran broj, c≤2. Ako bi bilo a=4, tada je posljednja jednačina $2b$+c=16, odakle zbog c≥2, slijedi b ≤6 (jer je b+c=8). Ovo nije moguće, jer iz ograničenja slijedi da je tada $2b$+c<16. Slično se zaključi da ne može biti a=1, a=2 i a=3. Ostaje jedina mogućnost: a=5; tada je $2b$+c=8 i b+c=7, što daje jedinstveno rješenje: b=1, c=6.

220. Neka je bilo a ljudi, b žena i c djece te je $a+b+c=12$ i $2a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}=12$. Ako drugu jednakost pomnožimo sa 4 dobićemo: $8a+2b+c=48$. Odavde zaključujemo da je $a\leq 5$ i c je paran broj, $c\leq 2$. Ako bi bilo $a=4$, tada je posljednja jednačina $2b+c=16$, odakle zbog $c\geq 2$, slijedi b ≤6 (jer je $b+c$=8). Ovo nije moguće, jer iz ograničenja slijedi da je tada $2b+c<16$. Slično se zaključi da ne može biti $a=1$, $a=2$ i $a=3$. Ostaje jedina mogućnost: $a=5$; tada je $2b+c=8$ i $b+c=7$, što daje jedinstveno rješenje: $b=1$, $c=6$.

221. Prema uslovu $\frac{a}{b}:\frac{35}{396}$ i $\frac{a}{b}:\frac{28}{297}$ su cijeli brojevi, pa su cijeli brojevi $\frac{396a}{35b}$ i $\frac{297}{28b}$. To je moguće ako se a skraćuje (dijeli) sa 35i 28, a 396 i 297su djeljivi sa b. Da bi pri tome $\frac{a}{b}$ bio najmanji, treba da bude a najmanji i b najveći takav broj. Dakle, a=NZS(35,28)=140 i b=NZD(396,297)=99, odnosno $\frac{a}{b}=99$.



Sl. 79



Sl. 80

222. Ako datu jednakost pomnožimo sa $1000(x+y+z)$ dobićemo:
$1000=(x+y+z)\cdot\overline{xyz}$, gdje je$x+y+z\leq 27$, $\overline{xyz}\leq 999$ i $x+y+z\leq\overline{xyz}$. Dakle broj 1000, pri uočenim ograničenjima, dobija se u slučajevima: $2\cdot 500$, $4\cdot 250$, $8\cdot 125$, $10\cdot 100$, $20\cdot 50$ i $25\cdot 40$. Od navedenih, datu jednakost zadovoljava samo slučaj $8\cdot 125$, jer je $\frac{1}{1+2+5}=0{,}125$.

223. Neka su CD visina i CS težišna linija hipotenuze AB trougla ABC, sl. 79. Znamo da je tačka S centar opisanog kruga, pa je SB=SC i ∢BCS=β. Kako je △BCD pravougli, slijedi da je ∢BCD=90⁻β, tj. ∢BCD=α. Otuda slijedi traženi zaključak: ∢SCD=∢BCD–∢BCS=α–β.

224. Neka je O centar opisanog kruga jednakostraničnog △ABC, sl. 80. Polupręčnicima OA=OB=OC=r dati trougao je podijeljen na tri podudarna disjunktna jednakokraka trougla sa osnovicama dužine 3 cm. Na osnovu nejednakosti trougla je, npr OA+OB=OC > $\frac{3}{2}$ ≥ 1. Dakle, dobili smo traženu podjelu.

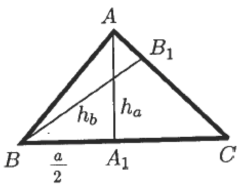
225. Ako je x vrijednost polinoma s lijeve strane date nejednakosti onda iz $2x \geq 0$ slijedi tražena nejednakost:
$2x=2a^2+2ab+2b^2+2bc+2c^2+2ac=(a^2+2ab+b^2)+(b^2+2bc+c^2)+(a^2+2ac+c^2)=$ $(a+b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2 \geq 0$, što je i trebalo dokazati.

226. Iz jednakosti$\cdot a \cdot h_a=b \cdot h_b$, slijedi $20a=24b$, tj. $a=\frac{6}{5}b$. Iz pravouglog $\triangle ABA_1$ dobijamo, sl. 81: $AB^2=AA_1^2+A_1B^2$; $b^2=20^2+\frac{1}{4}\left(\frac{6}{5}b\right)^2$ te je $b^2=625$; $b=25\ cm$. Slijedi $a=30\ cm$. Obim trougla: $80\ cm$, a površina: $300\ cm^2$.

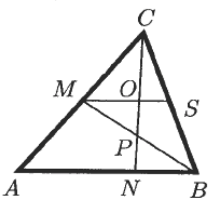
227. Neka je $\frac{a+b}{2}=\frac{b+c}{3}=\frac{c+a}{5}=k$, $k \in$ N. Kako je $a+c \leq 18$, slijedi $k \leq 4$. Odavde je $a+b=2k$, $b+c=3k$ i $a+c=5k$ pa je njihov zbir $2(a+b+c)=10k$, odnosno $a+b+c=5k$. Dakle, $a=2k$, $b=0$, $c=3k$. Traženi trocifreni broj je $\overline{abc}=100a+10b+c=203k$. Uzimajući za k vrijednosti 1, 2, 3 ili 4 dobijamo rješenja: 203, 406 i 609. (Broj $203 \cdot 4=812$ ne zadovoljava uslov $b=0$.)

228. Budući da je $a=n^2+n+1=n^2+n-12+13=n^2+4n-3n-12+13=n(n+4)-3(n+4)+13=$ $(n+4)(n-3)+13$, dati broj a će biti djeljiv sa 13 ako je 13 djelilac broja $(n+4)$ ili broja $(n-3)$. Dakle, traženi prirodni brojevi su: 9, 22, 35, ... ili 16, 29, 42,...

229. Neka je bilo x dječaka i y djevojčica. Tada važi $20x+30y=230$, odnosno $2x+3y=23$, pri čemu je ili x ili y neparan broj. Posljednji uslov pokazuje da y mora biti neparan broj i $y \leq 5$, jer je $x \geq 2$. Kako je x paran broj, imamo samo dvije mogućnosti: bilo je 10 dječaka i 1 djevojčica ili 4 dječaka i 5 djevojčica.



Sl. 81



Sl. 82

230. Neka je MS srednja linija $\triangle ABC$, $MS||AB$, sl. 82. Tada je presječna tačka O duži MS i CN središte visine CN, tj. $ON=\frac{1}{2}CN=\frac{1}{2}BM$. Uočimo da su trouglovi MOP i BNP slični te važi: $MP:BP=OP:PN$. Na osnovu osobina proporcije, dalje slijedi $(MP+BP):BP=(ON+PN):PN$, odnosno $BM:BP=ON:PN$, kako je $BM=2ON$, slijedi da je i $BP=2PN$, što je i trebalo dokazati.

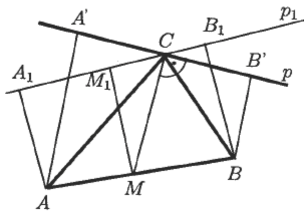
231. Broj 5^n se završava cifrom 5, a broj 6^n cifrom 6. Zbog toga se zbir 5^n+6^n završava cifrom 1. Posljednja cifra broja 7^n se ponavlja periodično, i to redom: 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, ... Dakle, posljednja cifra datog broja a je 8 (za $n=4k+1$), 0 (za $n=4k+2$), 4 (za $n=4k+3$) ili 2 (za $n=4k$).

232. Postupajući slično kao u zadatku **226.** transformišemo datu jednačinu:
$(x^2-4xz+z^2)+(z^2-4yz+4y^2)+(y^2-2y+1)=0$; $(x-2z)^2+(z-2y)^2+(y-1)^2=0$. Odavde slijedi: $x-2z=0$, $z-2y=0$, $y-1=0$, pa je $y=1$, $z=2y=2$ i $x=2z=4$.

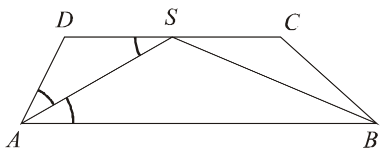
233. Traženi broj n ima prvu cifru 1 jer u protivnom broj $6n$ ne bi bio šestocifren. Prve cifre svih šest brojeva su različite među sobom i veće od nule. (Zaista, ako bi npr. $5n$ i $3n$ počinjali istom cifrom, onda bi $2n=5n-3n$ počinjao nulom, pa ne bi bio šestocifren) Iz istih razloga je krajnja cifra broja n neparna (inače bi broj $5n$ završavao nulom). Krajnja cifra nije 1, jer je to prva cifra. Takođe nije ni 9 ni 3, jer tada nijedan broj ne bi imao zadnju cifru 1, a nije ni 5. Dakle, krajnja cifra je 7, pa je $n=1....7$. Množenjem sa 2, 3, 4, 5, 6 dobijamo krajnje cifre 4, 1, 8, 5, 2. Dakle, cifre našeg broja su 1, 2, 4, 5, 7 i 8 i na svakom cifarskom mjestu su različite. (U protivnom bi razlika dva broja, a to je opet jedan od naših šest brojeva, na tom mjestu imala cifru 0 ili 9, što nije moguće.). Ako ove brojeve potpišemo i saberemo, zbir cifara u svakoj koloni će biti: $1+2+4+5+7+8=27$. Zbog toga je $21n=2999997$, odnosno $n=142857$.

234. Označimo sa a, b, c broj jabuka u tri košare. Tada je $a+b+c=300$, a uzeto je $\frac{a}{3}+\frac{3b}{5}+\frac{3c}{4}=160$. Ovu jednačinu pomnožimo sa 3 i od nje oduzmemo prvu jednačinu i važi: $\frac{4b}{5}+\frac{5c}{4}=180$; tj. $\frac{2b}{5}+\frac{5c}{8}=90$. Dakle, imali bi 90 jabuka.

235. Neka je p_1 prava koja sadrži tačku C, a ostale njene tačke su van datog trougla, sl. 83. Uočimo težišnu duž CM datog trougla i tačke A_1, B_1, M_1 koje predstavljaju podnožja normala iz A, B i M na pravu p_1. Četverougao ABB_1A je pravougli trapez, pa je zbir rastojanja tačaka A i B od prave p_1 jednak $AA_1+BB_1= 2MM_1$ (srednja linija trapeza). Dakle, zbir će biti najveći ako je MM_1 maksimalne dužine. Na slici uočavamo da tačke C, M i M_1 obrazuju pravougli trougao u kojem je MM_1 kateta, a CM hipotenuza. Zbog toga je $MM_1 \leq CM$. Slijedi da je tražena prava p normalna na težišnu duž CM.



Sl. 83



Sl. 84

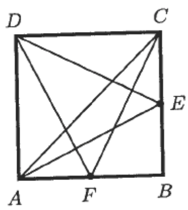
236. Neka je $ABCD$ dati trapez, sl. 84. Uočimo na manjoj osnovi tačku S, tako da je $DS=AD$. Prema uslovu, tada je i $CS=BC$ pa je trougao ADS jednakokraki i $\measuredangle ASD=\measuredangle SAD$. Zbog paralelnosti pravih AB i CD biće $\measuredangle ASD=\measuredangle SAB$. Odavde slijedi $\measuredangle SAD=\measuredangle SAB$, pa je prava AS simetrala ugla BAD. Slično se dokaže i da je prava BS simetrala ugla ABC.

237. Dokazaćemo da je $a^2+ab+b^2-3(a+b-1) \geq 0$. Transformacijom izraza na lijevoj strani nejednakosti dobijamo: $a^2+ab+b^2-3a-3b+3=(a^2-2a+1)+(b^2-2b+1)+(ab-a-b+1)=(a-1)^2+(b-1)^2+(a-1)(b-1)$. Neka je $a-1=m$ i $b-1=n$. Tada je:
$m^2+n^2+mn=n^2+mn+\frac{m^2}{4}+\frac{3n^2}{4}=\left(m+\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3n^2}{4} \geq 0.$

238. Unutrašnji ugao pravilnog n–tougla je $\alpha_n = \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n}$. Odredimo prirodne brojeve m i n, $m\geq 3$ i $n\geq 3$ da je $\alpha_m : \alpha_n = 4 : 3$; tj. $\frac{(m-2)\cdot 180^0}{m} : \frac{(n-2)\cdot 180^0}{n} = 4 : 3$. Dalje dobijamo $n = \frac{6m}{8-m} = \frac{48-6(8-m)}{8-m} = \frac{48}{8-m} - 6$. Nazivnik $(8 - m)$ mora biti djelilac broja 48 i $n>m$, pa je m=4, m=6 i m=7. Dakle, m=4, n=6, ili m=6, n=18, ili m=7, n=42.

239. Trouglovi ABE i CBF su podudarni, sl. 85, jer je AB=BC, $\sphericalangle BAE$=$\sphericalangle BCF$= 90^0 i $\sphericalangle ABE$=$\sphericalangle BCF$ ($\sphericalangle ABE$=90^0–$\sphericalangle EBC$=$\sphericalangle CBF$). Iz ove podudarnosti sljedi BE=BF, pa je $\triangle BEF$ jednakokraki pravougli površine $\frac{BF^2}{2} = 200\ cm$, pa je BF=20 cm. Iz površine datog kvadrata dobijamo BC=16 cm. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli $\triangle BCF$, dobijamo: CF^2=BF^2–BC^2=144; CF=12 cm.

240. Uočimo središta E i F stranica BC i AB jediničnog kvadrata, sl. 86. Tada je $AE = \frac{\sqrt{5}}{2} = DE = CF$ i $AC = \sqrt{2} > \frac{\sqrt{5}}{2}$. Pretpostavimo da tvrđenje nije tačno , tj. da su svake dvije tačke A i B koje zadovoljavaju uslov $AB \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$ obojene različitim bojama. Neka je A crvena tačka. Zbog $AE = \frac{\sqrt{5}}{2}$ slijedi da je E plava tačka. Slično slijedi da je D crvena, a F plava tačka. Promatrajmo sada tačku C. Ako je C plava, tada je $CF \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$ i C i F nisu različitih boja. Ako je C crvena, tada je $AC \geq \frac{\sqrt{5}}{2}$, a A i C nisu različito obojene. Dakle, dolazimo do kontradikcije, pa pretpostavka nije tačna, tačno je tvrđenje zadatka.

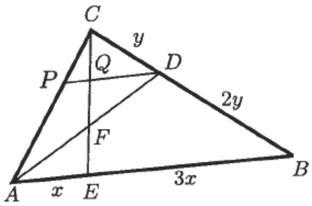


Sl. 86

241. Iz prve jednačine je $y = 4 - x - z$ zamijenimo u drugu i dobijemo: $x(4–x–z)+z(4–x–z)+zx+z=7$, odnosno: $4x–x^2–xz+4z–z^2+z=7$. Posljednju jednakost pomnožimo sa $(–2)$ i pregrupišemo sabirke: $(x^2+ z^2+2xz–4x–4z+4)+(x^2–4x+4) +(z^2–6z+9)=3$; $(x+z–2)^2+(x–2)^2+(z–3)^2=3$. Budući da su x i z cijeli brojevi, ova jednakost je moguća samo ako izrazi u zagradama imaju vrijednost $(+1)$ ili $(–1)$. Za x–2=1 ili x–2= –1 dobijamo x=3 ili z=1. Slično, zaključimo da je x=4 ili z=2, kao i da je $x+z$=3 ili $x+z$=1. Jedina moguća kombinacija se dobija ako je $x+z$=3 i tada je x=1, z=2, tj. y=4–x–z=1.

242. Neka je $AE = x$ i $CD = y$, sl. 87. Tada je BE=3x i BD=2y. Neka je P tačka stranice AC, takva da je $DP||AB$ i sa Q označimo tačku presjeka duži DP i CE. Na osnovu Talesove teoreme važi BE:DQ=CB:CD, odnosno 3x:DQ= 3y:y, pa je DQ=x=AE. Primijenimo Talesovu teoremu na trouglove AEF i DQF:

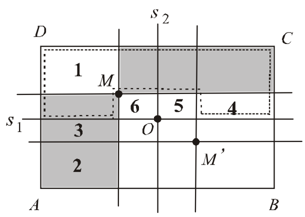
$AE : DQ = EF : FQ = AF : FD$, odnosno $AE : AE = EF : FQ = AF : FD$, pa je $EF = FQ$ i $AF = FD$. Takođe, važi jednakost $CQ : CE = CD : CB = 1 : 3$, odakle zaključujemo $CQ = \frac{1}{2}$, tj. $CQ = QF = EF$. Zbog toga je $\frac{EF}{FC} = \frac{1}{2}$. Iz $AD = FD$ je $\frac{AF}{FD} = 1$, pa je $\frac{EF}{FC} + \frac{AF}{FD} = \frac{3}{2}$.



Sl. 87

243. Za pozitivne realne brojeve x i y važi: $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \geq 2$. Kako je
$(a+b+c)^3 - a^3 - b^3 - c^3 = 3a^2b + 3ab^2 + 3a^2c + 3ac^2 + 3b^2c + 3bc^2 + 6abc =$
$3((a^2b+ab^2)+(a^2c+ac^2)+(b^2c+bc^2)+18$, jer je $abc=3$. Iz $ab = 3$ dobijamo $ab = \frac{3}{c}$, $ac = \frac{3}{b}$ i $bc = \frac{3}{a}$–. Transformišimo lijevu stranu zadate jednakosti:
$3\big(ab(a+b) + ac(a+c) + bc(b+c)\big) + 18 = 3 \cdot \left(3 \cdot \frac{a+b}{c} + 3 \cdot \frac{a+c}{b} + 3 \cdot \frac{b+c}{a}\right) + 18 =$
$9 \cdot \left(\left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right) + \left(\frac{b}{c} + \frac{c}{b}\right) + \left(\frac{a}{c} + \frac{c}{a}\right)\right) + 18 \geq 9 \cdot (2 + 2 + 2) + 18 = 72$, jer je $\frac{x}{y} + \frac{y}{z} \geq 2$.
Jednakost važi ako je $a = b = c = \sqrt[3]{3}$.

244. Ose simetrije s_1 i s_2 dijele dati pravougaonik na četiri dijela, površina $P/4$, sl. 88. Tvrđenje je očigledno ako tačka M pripada pravim s_1 ili s_2 ili je u jednoj od četvrtina pravougaonika koja sadrži tačku A ili tačku C. Neka je M izabrana kao



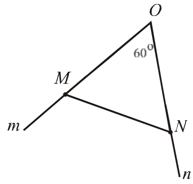
Sl. 88

na slici. Izaberimo tačku M'simetričnu sa M u odnosu na centar O pravougaonika, pa kroz tačke M i M' paralelnim stranicama podijelimo pravougaonik $ABCD$. Dokazaćemo da je zbir traženih pravougaonika, na sl. 88. osjenčenih, manji od $P/2$. Zbog simetrije pravougaonika $ABCD$, njegovi dijelovi označeni sa 1 i 2 su jednaki, a takođe i dijelovi označeni brojevima 3 i 4. Zbog toga je zbir osjenčenih površina jednak površini koji je na sl. 88. oivičen isprekidanom linijom. Međutim, ova površina je od polovine pravougaonika manja za zbir površina pravougaonika označenih brojevima 5 i 6. Dakle, zbir dvije osjenčene površine je manji od $\frac{P}{2}$, što je moguće samo ako je bar jedna od te dvije površine manja od $\frac{P}{4}$, što se i tvrdi.

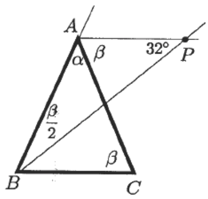
245. Prema uslovima zadatka je n=18m+8, pa je n=9·(2m)+8; n=6·(3m+1)+2; n=3·(6m+2) +2. Dakle, traženi ostaci dijeljenja su redom: 8, 2, 2.

246. Vidi rješenje zadatka **123**.

247. Konstruišemo jednakostraničan $\triangle MNO$, stranice MN i poluprave Om i On određuju traženi trougao, sl. 89.



Sl. 89



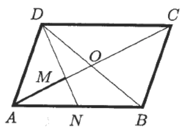
Sl. 90

248. Pretpostavimo da treći brat, najmlađi, ima x godina. Tada Ana ima $3x$ godina. Prvi brat ima $3x+3$ godina, drugi $3x-3$ godina, a otac je star $3\cdot 3x$, tj. $9x$ godina. Zbir njihovih godina je: $3x+(3x+3)+(3x-3)+x+9x=95$, pa je x=5. Dakle, Ana je imala 15 godina, braća 18, 12 i 5, a otac 45 godina.

249. Neka je $\overline{abcde7}$ traženi broj. Tada je: $\overline{7abcde} = 5\cdot\overline{abcde7}$. Ako je $x=\overline{abcd}$, tada prema uslovima zadatka važi: $700000+x=5\cdot(10x+7)$, pa je $x=14\,285$ i traženi broj je $\mathbf{142\,857}$.

250. Među uglovima α i β datog trougla ABC, sl. 90. iz zbira unutrašnjih uglova slijedi α=180°−2β. Uglovi $\sphericalangle PAC$ i $\sphericalangle BCA$ su jednaki ,kao uglovi sa paralelnim kracima. U $\triangle ABP$ važi:$\alpha+\beta+\frac{\beta}{2}+32^0=180^0$; $180^0-2\beta+\beta+\frac{\beta}{2}+32^0=180^0$; pa je $\beta=64^0$. Slijedi $\alpha=52^0$.

251. Dijagonale paralelograma se polove, sl. 91. pa je presječna tačka dijagonala, tačka O, središte duži AC i BD. Slijedi da su AO i DN težišne duži $\triangle ABD$, pa je tačka M težište. Dakle, $AM=\frac{2}{3}AO=\frac{2}{3}\cdot\frac{AC}{2}=\frac{AC}{3}=8\,cm$.



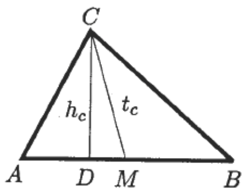
Sl. 91

252. Poslije x minuta u prvoj posudi ima $(540-25x)$ litara, a u drugoj $(540-15x)$ litara. Prema zadatku je: $540-15x=6(540-25x)$, pa je x=20 minuta.

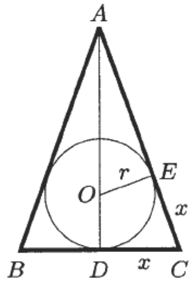
253. a) Važi $A(x,y)=(2x^2+2xy+y^2)+x^2-2x+2y+7=(x+y)^2+2(x+y)+1+(x^2-4x+4)+2$ $=(x+y+1)^2+(x-2)^2+2\geq 2>0$ (jer je $(x+y+1)^2\geq 0$ i $(x-2)^2\geq 0$ za svaki x).

b) Iz prethodnog slijedi $A(x,y)\geq 2$, pa je 2 minimalna vrijednost polinoma $A(x,y)$. Minimum se dobije za $x+y+1=0$ i $x-2=0$, tj. x=2 i y= −3.

254. Iz $D(x,y)=12$ slijedi $x=12m$ i $y=12n$, gdje su m i n prirodni brojevi. Zatim, iz $x+y=84$, tj iz $12m+12n=84$ je $m+n=7$, pa $m\in\{1,2,3,4,5,6\}$, te je $(x,y)\in\{(12,72),(24,60),(36,48),(48,36),(60,24),(72,12)\}$.



Sl. 92



Sl. 93

255. Visina h_c i težišna duž t_c određuju pravougli $\triangle CDM$, sl. 92, na koji primijenimo Pitagorinu teoremu: $DM^2=t_c^2-h_c^2=17^2-15^2=64$; $DM=8\ cm$. Kako je $AM = MB = \frac{c}{2} = 15\,cm$, to je $AD=7\ cm$ i $DB=23\ cm$, pa su hipotenuze pravouglih trouglova ACD i BCD, redom: $b = AC = \sqrt{274}\,cm$ i $a = BC = \sqrt{754}\,cm$.

256. Neka je x dužina tangentne duži iz C na upisani krug: $x=CD=CE$, sl. 93. Iz $\triangle AEO$ slijedi: $AE^2=AO^2-OE^2=(h-r)^2-r^2=10^2-6^2=64$; $AE=8\ cm$. Dalje, iz $\triangle ACD$ slijedi $AC^2=AD^2+CD^2$; $(8+x)^2=h^2+x^2$; $x=12\ cm$. Kako je $x = \frac{BC}{2}$, slijedi $a=BC=24\ cm$, pa je obim: $O=64\ cm$ i površina $P = \frac{1}{2}a \cdot h = 12 \cdot 16 = 192\ cm^2$.

257. Datu jednačinu transformišemo: $2x^2+2xy+xy+y^2=-1$; $2x(x+y)+y(x+y)=-1$; $(x+y)(2x+y)=-1$. Odavde slijedi: ($x+y=1$ i $2x+y=-1$) ili ($x+y=-1$ i $2x+y=1$). Rješavanjem ovih sistema dobijamo: $x=-2$ i $y=3$, ili $x=-3$ i $y=2$.

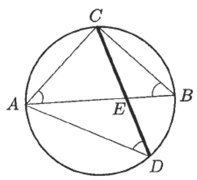
258. Uglovi ADC i ABC su jednaki kao periferijski uglovi nad istom tetivom AC, sl. 94. Međutim, u jednakokrakom $\triangle ABC$ je $AC=BC$, pa je $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BAC$. Slije-di da je $\sphericalangle ADC=\sphericalangle EAC$, pa su trouglovi ACD i AEC slični. (Imaju još i zajednički ugao ACD), pa je $AC:CD=CE:AC$; $14:CD=10:14$; $CD=19{,}6\ cm$.

259. Očigledno, jedna cijev bi napunila bazen za 36 sati. Toliko iznosi zbir vremena isticanja vode na sve četiri cijevi na način kako je opisano. Ako je prva otvorena x sati, druga je otvorena $(x-t)$ sati, treća $(x-2t)$ sati i četvrta $(x-3t)$ sati. Tako dobijemo jednačine: $x=5(x-3t)$ i $x+(x-t)+(x-2t)+(x-3t)=36$. Rješenje ovog sistema jednačina je $t=4$, $x=15$. Bazen se napunio za 15 sati.

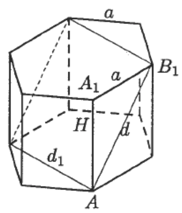
260. Manja dijagonale osnove je $d_1 = a\sqrt{3} = 6\,cm$, sl. 95, pa je $a = 2\sqrt{3}\,cm$. U pravouglom $\triangle AA_1B_1$ važi: $A_1B_1 = a = 2\sqrt{3}\,cm$, $d = 6\,cm$, pa je $H^2=d^2-a^2=24\ cm^2$; $H = 2\sqrt{6}\,cm$. Zapremina prizme: $V = \frac{6\,a^2}{4} \cdot H = 108\sqrt{2}\,cm^3$.

261. Brojevi 5, 7 i 9 su uzajamno prosti, pa je broj koji je djeljiv sa 5, 7 i 9 ujedno djeljiv i sa $5\cdot7\cdot9$, tj. sa 315. Broj $\overline{579abc}$ je $579000+\overline{abc}$. Dijeljenjem 579000sa 315 dobija se ostatak 30, što znači da je broj 579000+(315–30)= 579285 djeljiv sa 315 to je najmanji od traženih brojeva oblika $\overline{579abc}$. Uslove zadovoljavaju još i brojevi 579285+315=579600 i 579600+315= 579915. Dakle, dobijamo tri rješenja: 285, 600 i 915.

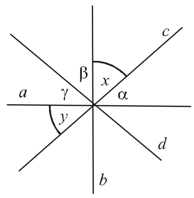
262. Ako je Mirko uštedio $x\ KM$, onda je imao: poslije prvog mjeseca $x-10+\frac{1}{3}(x-10)=\frac{4}{3}(x-10)KM$, a poslije drugog mjeseca $\frac{4}{3}(x-10)-10+\frac{1}{3}\left(\frac{4}{3}(x-10)-10\right)=\frac{1}{9}(16x-280)KM$. Najzad poslije trećeg mjeseca uštedio je $\frac{1}{9}(16x-280)-10+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{9}(16x-280)-10\right)=\frac{1}{27}(61x-1480)$. Ovaj iznos je dva puta veći od početne ušteđevine: $\frac{1}{27}(61x-1480)=2x$, pa je $x=148\ KM$. Mirko je prije tri mjeseca imao $148\ KM$ ušteđevine.



Sl. 94



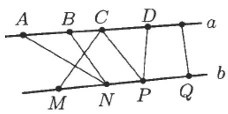
Sl. 95



Sl. 96

263. Uglovi α i y su unakrsni, sl. 96, pa je $x+y=90^0$. Kako je $x=\frac{4}{5}y$, dobijamo da je $\frac{4}{5}y+y=90^0$; $y=50^0$. Odavde slijedi $x=40^0$, pa je $\alpha=y=50^0, \beta=90^0-x=50^0$ i $\gamma=90^0-\beta=40^0$.

264. a) Svake dvije tačke određuju jednu duž, pa imamo ukupno (9·8):2=36 duži.
b) Svaka duž prave a sa jednom tačkom prave b, sl. 97. određuje jedan trougao (na primjer $\triangle ABN$) i svaka duž prave b sa jednom tačkom prave a određuje trougao (nar. $\triangle MPC$). Tačke. A, B, C, D, E određuju ukupno (5·4):2=10 duži, a tačke M, N, P, Q (4·3):2=6 duži. Dakle, trouglova ima: 10·4+6·5=70.
c) Svaka duž prave a sa jednom duži na pravoj b određuje jedan konveksan trapez (ili paralelogram). Takvih četverouglova ima 10·6=60.



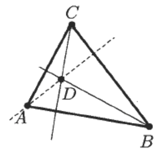
Sl. 97

265. Sabirke u zagradi grupišemo po dva na slijedeći način:
$\frac{1}{2}+\frac{1}{99}=\frac{101}{2\cdot99}, \frac{1}{3}+\frac{1}{98}=\frac{101}{3\cdot98}, \cdots, \frac{1}{50}+\frac{1}{51}=\frac{101}{50\cdot51}$. Kad t ako dobijene ove zbirove pomnožimo sa $2\cdot3\cdot4\cdot\ldots\cdot100$, dobićemo zbir od 50 cijelih brojeva, pri čemu svaki od njih ima jedan činilac broj 101. Dakle, zbir je djeljiv sa 101. Generalizacija: Ako

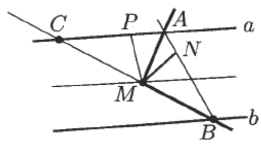
se radi o n sabiraka, $n \in \mathrm{N}$, tada ćemo lako, na izloženi način dokazati da je dobijeni zbir djeljiv sa $(n+1)$.

266. Neka je x broj posjetilaca prije smanjenja cijene. Tada je ostvaren prihod $9x$ KM. Po novoj cijeni od y KM broj posjetilaca je za 50% veći i iznosi $1{,}5x$, a prihod je povećan za 25% pa iznosi $1{,}25\cdot 9x$. Sada iz jednakosti $1{,}5x\cdot y=1{,}25\cdot 9x$ dobijamo: $y=(1{,}25\cdot 9):1{,}5=11{,}25:1{,}5=7{,}50$.

267. Tačke A, B, C, nisu na jednoj pravoj, sl. 98, jer bi u suprotnom postojale dvije normale iz tačke D na jednu pravu, a to nije moguće. Dakle, postoji $\triangle ABC$. Iz uslova $AB\perp CD$ i $AC\perp BD$ slijedi da je tačka D ortocentar $\triangle ABC$, pa je AD treća visina i zbog toga je $AD\perp BC$.



Sl. 98



Sl. 99

268. Neka je $\sphericalangle AMB=90^0$, kao što je opisano u zadatku. Označimo sa C presjek prave BM sa a, a sa N i P označimo podnožje normale iz M na AB i na a, sl. 99. Budući da je MP polovina rastojanja između a i b, slijedi da je dužina duži MP konstantna. Položaj tačke M je određena tako da je to središte duži BC, tj. $BM=MC$. Kako je $AM\perp BM$, slijedi da su pravougli trouglovi AMB i AMC podudarni, pa je $\sphericalangle BAM=\sphericalangle CAM$. Dakle, prava AM je simetrala ugla BAC, pa su normale na krake ovog ugla iz tačke M jednake, tj. $MN=MP$. Slijedi da je MN konstantne dužine, što je i trebalo dokazati.

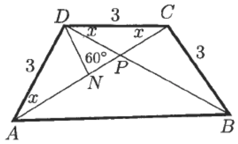
269. Neka je $\overline{abc}$ traženi broj. Tada je $\overline{abc}=33\cdot(a+b+c)$. Iz ove jednakosti slijedi da je $\overline{abc}$ djeljivo sa 3, pa je zbir cifara, tj. $(a+b+c)$ djeljiv sa 3. dakle, $a+b+c=3k$, pa je $\overline{abc}=33\cdot 3=99k$. Znači, broj $\overline{abc}$ je djeljiv sa 9, pa mu je zbir cifara 9 ili 18. (Ne može biti $a+b+c=27$, jer je $33\cdot 27=891\neq 999$). Provjerom utvrdimo da je $a+b+c=18$ i $\overline{abc}=594=33\cdot 18$.

270. Neka je P presječna tačka dijagonala AC i BD trapeza $ABCD$, sl. 100. Prema uslovu zadatka $\triangle ACD$ je jednakokraki pa je $\sphericalangle CAD=\sphericalangle ACD=x$. Trapez je jednakokraki pa je $CP=DP$ i $\sphericalangle CDP=\sphericalangle PCD$. U jednakokrakom $\triangle CDP$ je spo-ljašnji ugao $\sphericalangle APD=60^0$, prema uslovima zadatka, odakle slijedi $\sphericalangle ACD=30^0$. Dakle, $\sphericalangle CAD=30^0$, pa je i $\sphericalangle CAD=30^0$, a $\sphericalangle ADC=120^0$. Visina DN trougla ACD polovi dijagonalu AC. Kako su unutrašnji uglovi $\triangle ADN$ od 30^0, 60^0 i 90^0, to je $AN=\frac{3\sqrt{3}}{2}\ cm$, te je dijagonala trapeza je $AC=2AN=3\sqrt{3}\ cm$. U pravouglom trouglu ABC ($\sphericalangle ACB=\sphericalangle BCD-\sphericalangle ACD=120^0-30^0$) $\sphericalangle BAC$ je 30^0, pa je $AB=2BC=6\ cm$.

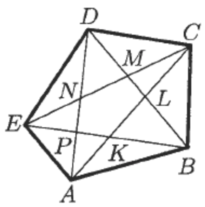
271. Pretpostavimo da postoje prirodni brojevi m i n, takvi da je $m^2-n^2=101010$. Tada je $(m+n)(m-n)=2\cdot 50505$. Dakle, $m+n$ je paran broj ili je $m-n$ paran broj.

Međutim, ako je $m+n$ paran broj, tj $m+n=2k$, onda je $m-n=m+n-2n=2k-2n$, tj. $m-n=2(k-n)$. Tada je $(m+n)\cdot(m-n)=2k\cdot 2(k-n)=4k(k-n)$, tj. $(m+n)(m-n)$ je djeljiv sa 4, a $101010=2\cdot 50505$ nije djeljivo s 4. Ako je $m+n$ neparan broj, tj. $m+n= 2k+1$, tada je $m-n =m+n-2n=2(k-n)+1$. Dakle, ako je $m+n$ neparan broj, tada je i $m-n$ neparan broj, pa je $(m+n)(m-n)$ takođe neparan broj. To nije moguće, jer je 101010 paran broj. Dakle $m+n$ ne može biti ni paran ni neparan broj. Treća mogućnost ne postoji, što znači da ne postoje prirodni brojevi m i n takvi da je $m^2-n^2=101010$.

272. Koristićemo nejednakost trougla. U $\triangle ABK$, sl. 101. je $AK+KB>AB$ (1). Slično, iz trouglova BCL, CDM, DEN i AEP dobijamo nejednakosti: $BL+CL>$BC (2), $CM+DM>CD$ (3), $DN+EN>DE$ (4) i $EP+AP>AE$ (5). Sabiranjem ovih pet nejednakosti i grupisanjem sabiraka na lijevoj strani dobijamo nejednakost: $(AK+CL)+(BL+MD)+(CM+NE)+(DN+PA)+(EP+KB)>AB+BC+CD+DE+EA$. Očigledno je $AC>(AK+LC)$, zatim $BD>(BL+LM)$,…, itd, $EB>(EP+KB)$ pa važi $AC+BD+CE+DA+EB>AB+BC+CD+DE+EA$. U trouglu ABC je $AC<AB+BC$, a slično, za trouglova BCD, CDE, DEA, EAB važe nejednakosti: $BD<BC+CD$, $CE<CD+DE$, $DA<DE+EA$ i $EB<EA+AB$. Sabiranjem ovih pet nejednakosti dobijamo $AC+BD+CE+DA+EB<2(AB+BC+CD+DE+EA)$, što je i trebalo dokazati.



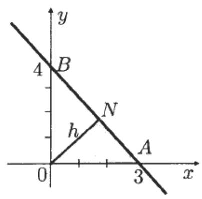
Sl. 100



Sl. 101

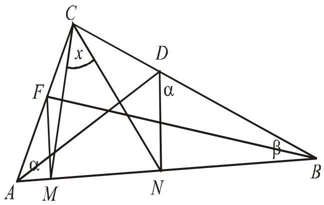
273. Kako je $(9x^2+24x+16)+(y^2-8y+16)=0 \Leftrightarrow (3x+4)^2+(y-4)^2=0$, onda slijedi. Da je $3x+4=0$ i $y-4=0$; tj. $x = -\frac{4}{3}$ i $y = 4$. Dakle, $(k, n) = (-\frac{4}{3}, 4)$, pa je jednačina prave p: $y = -\frac{4}{3}x + 4$, a njen grafik je prestavljen na sl. 102. Prava p odsjeca na koordinatnim osama pravougli $\triangle OAB$ sa katetama $OA=3$ i $OB=4$. Hipotenuza je $AB=5$ ($AB^2=OA^2+OB^2$). a) Površina $\triangle OAB$ je $P = \frac{1}{2}OA \cdot OB = 6$.

b) Iz jednakosti površina $\frac{1}{2}AB \cdot h = \frac{1}{2}OA \cdot OB$ slijedi $5h=12$. Dakle, rastojanje od tačke O do prave p: $h = \frac{12}{5}$.

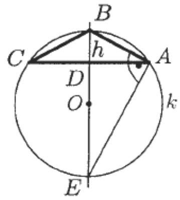


Sl. 102

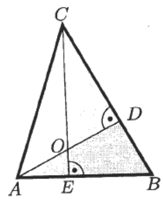
274. Prava AD je simetrala ugla BAC, a duži CD i DN su normalne na krake ovog ugla, sl. 103. pa je $CD=DN$. Slijedi da je $\triangle CDN$ jednakokraki sa jednakim uglovima kod tjemena C i N. Trougao BDN je pravougli sa oštrim uglom β. Dakle, $\sphericalangle BDN=90^0-\beta=\alpha$. Kako je $\sphericalangle BDN=\sphericalangle DCN+\sphericalangle DNC$ (spoljašnji ugao trougla), to je $\sphericalangle DCN=\frac{\alpha}{2}$. Slično se dokaže da u jednakokrakom $\triangle CFM$ važi: $\sphericalangle CFM=\frac{\beta}{2}$. Traženi ugao je $\sphericalangle x=\sphericalangle MCN=90^0-\frac{\alpha}{2}-\frac{\beta}{2}=90^0-\frac{90^0}{2}=45^0$.



Sl. 103



Sl. 104



Sl. 105

275. Oslobađanjem zagrada i sređivanjem utvrdićemo da je data nejednakost ekvivalentna sa $a^4-a^3-a+1>0$. Kako je $a^4-a^3-a+1=a^3(a-1)-(a-1)=(a-1)(a^3-1)$, to za $a>1$, dobijamo $a-1>0$ i $a^3-1>0$, pa je i $(a-1)(a^3-1)>0$. Za $a<1$, slijedi $a-1<0$ i $a^3-1<0$, pa je opet $(a-1)(a^3-1)>0$. Time je data nejednakost dokazana.

276. Neka je ABC jednakokraki trougao upisan u krug k, sl. 104. takav da je $AC+h=2r=10\ cm$. Traži se dužina visine $h=BD$, koja je simetrala osnovice AC, pa pripada prečniku BE. Zbog toga je $DE+h=2r$, pa je $DE=AC$. Ugao BAE je prav (ugao nad prečnikom), pa je $AD=\frac{AC}{2}$ hipotenuzina visina $\triangle ABE$. U tom trouglu važi: $AD^2=BD\cdot DE$, odakle je: $\left(\frac{AC}{2}\right)^2=h\cdot DE=h\cdot AC$, tj. $\frac{AC^2}{4}=h\cdot AC$, pa je $AC=4h$. Iz jednakosti $AC+h=10$ dobijamo: $4h+h=10$; $h=2\ cm$.

277. Neka je u svakom od šest odjeljenja bilo po k učenika. Tada je $6k>150$, pa je u ostalim odjeljenjima bilo $6k\cdot1{,}15=6{,}9k$ učenika. Ukupno je u školi bilo $6k+6{,}9k$, tj. $12{,}9k$ učenika i $12{,}9k<400$. Broj $12{,}9k$ mora biti cijeli i zbog $6k>150$, je $k>25$. Jedino $k=30$ ispunjava uslove, pa je u školi bilo $12{,}9\cdot30=387$ učenika.

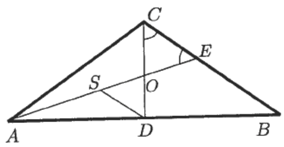
278. Vidi zadatak **190**.

279. Neka su AD i CE visine $\triangle ABC$, sl. 105. Tada je $\sphericalangle BAD=\sphericalangle BCE$ (uglovi sa normalnim kracima). Budući da je i $AB=CO$, slijedi da su pravougli trouglovi ABD i COD podudarni. Zbog toga je $AD=CD$. Sada imamo pravougli $\triangle ACD$ sa jednakim katetama. Dakle, $\sphericalangle ACD=45^0$.

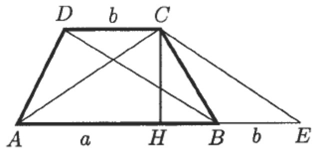
280. Neka su CD i AE, redom, visina na osnovicu i simetrala ugla $\sphericalangle BAC$, sl. 106. Dat je tup ugao, što znači da je to $\sphericalangle ACB=108^0$. Onda je $\sphericalangle BAC=36^0$, pa je u $\triangle ACE$ kod tjemena A ugao $18^0=\frac{36^0}{2}$, a $\sphericalangle AEC=180^0-18^0-108^0=54^0$. Kako je $\sphericalangle BCD=54^0$ $(=108^0/2)$, to je $\triangle COE$ jednakokraki i $CO=EO$. Neka je S središte simetrale

AE. Kako je i D središte AB, to je DS srednja linija $\triangle ABE$, pa je $DS||BE$ i $\triangle OSD$ je jednkokraki, a $OD=OS$. Slijedi da je $CO+OD= EO+OS=ES$. Kako je $AE=2\cdot ES$, slijedi $AE=2\cdot CD$, što se i trebalo dokazati.

281. a) $x^3+7x^2-5x-75=x^3-3x^2+10x^2-30x+25x-75=x^2(x-3)+10x(x-3)+25(x-3)= (x-3)(x^2+10x+25=(x-3)(x+5)^2$. b) $P(n)=(n-3)(n+5)(n+5)$. Ako je n neparan broj, onda je svaki od brojeva $(n-3)$ i $(n+5)$ paran, tj. djeljiv sa 2. Dakle, proizvod $P(n)$ tri parna broja djeljiv je sa 8.



Sl. 106



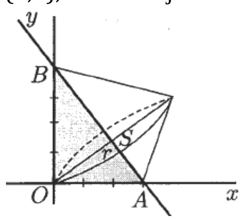
Sl. 107

282. Očigledno je $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}, \frac{3}{4}<\frac{4}{5}, \frac{5}{6}<\frac{6}{7}, \cdots, \frac{9999}{10000}<\frac{10000}{10004}$, pa je: $\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}<\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{10000}{10001}$. Neka je $x=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{9999}{10000}$. Tada je $\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\ldots\cdot\frac{10000}{10001}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{6}{5}\cdot\ldots\cdot\frac{10000}{10001}\cdot\frac{1}{10001}=\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{10001}$, pa posljednja nejednakost ima oblik $x<\frac{1}{10001\cdot x}$. Odavde je $x^2<\frac{1}{10001}<\frac{1}{10000}$, pa je $x<\frac{1}{100}$.

283. Neka je $x=\overline{abcde}$. Tada je $\overline{1abcde}$ traženi broj, pa je prema uslovima zadatka, $3\cdot\overline{1abcde}=\overline{abcde1}$. Kako je $x=\overline{abcde}$, to prethodna jednakost ima oblik $3\cdot(100000+x)=10x+1$. Odavde je x=42857. Traženi broj je **142857**.

284. Kako je srednja linija $m=\frac{a+b}{2}$, to je $a+b=8\ cm$. Neka je E tačka na produžetku osnovice AB, takva da je četvorougao $BECD$ paralelogram, sl. 107. Tada je $BE=b$, pa je $AE=a+b=8\ cm$. Trapez je jednakokraki, pa ima jednake dijagonale; $AC=BD$. Kako je $CE=BD$, to je $CE=AC$, pa je $\triangle ACE$ jednakokraki i tačka H podnožje visine iz C *na* AE. Za trougao AHC važi: $AC^2=AH^2+CH^2$; $AC^2= 4^2+3^2=25$; $AC=5\ cm$.

285. Izraz $A=\frac{2}{(2a-3b)^2+4}$ postiže najveću vrijednost kad je imenilac najmanji. Imenilac je najmanji kad je $2a-3b=0$. Tada je: $y=\left(2a-3b-\frac{4}{3}\right)x+2(2a-3b)+4$ $=\left(0-\frac{4}{3}\right)x+2\cdot 0+4$, pa je data funkcija: $y=-\frac{4}{3}x+4$ i njen grafik je prava određena tačkama $A(3,0)$ i $B(0,4)$, sl. 108. Tijelo nastaje rotacijom trougla OAB



Sl. 108

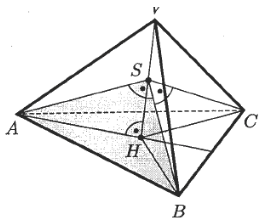
oko hipotenuze AB. Dobijamo dvije kupe sa zajedničkom bazom poluprečnika OS. Poluprečnik je hipotenuzina visina $\triangle OAB$ i izračunaćemo ga koristeći površine trougla $\triangle OAB$: $OA\cdot OB=OS\cdot AB$, tj. $3\cdot 4=OS\cdot 5$ (jer je $AB^2=OA^2+OB^2=3^2+4^2=25$). Dakle, $OS=\frac{12}{5}=r$. Zapremina tijela je

$$V=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot AS+\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot SB=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot(SA+SB)=\frac{1}{3}\cdot r^2\cdot\pi\cdot AB;$$

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{144}{25}\cdot\pi\cdot 5=\frac{48\pi}{5}.$$

286. Kako je, npr. $a{:}b=h_b{:}h_a$ i $a{:}c=h_c{:}h_a$, to važi $a{:}b=4{:}6$ i $a{:}c=3{:}6$, odnosno $b=\frac{3}{2}a$ i $c=2a$, pa iz obima:$a+\frac{3}{2}a+2a=9$ slijedi: $a=2\ cm$, $b=3\ cm$, $c=4\ cm$.

287. Neka je traženi par (x,y). Tada je $xy=10(x+y)$, odnosno $xy-10x-10y=0$. Transformišimo jednakost $xy-10x-10y+100=100$: $x(y-10)-10(y-10)=100$. Odavde dobijemo $(y-10)(x-10)=100=1\cdot 100=2\cdot 50=4\cdot 25=5\cdot 20=10\cdot 10$. Ako pretpostavimo da je $x\leq y$, dobićemo, npr. $x-10=1$ i $y-10=100$, pa je $x=11$ i $y=110$. Slično iz $x-10=2$ i $y-10=50$, dobijamo $x=12$ i $y=60$. Ostala rješenja su: $x=14$, $y=35$, ili $x=1$, $y=30$ ili $x=20$, $y=20$.



Sl. 109

288. Dokažimo da je $\sphericalangle ASB=90^0$, gdje je S središte visine VH, sl. 109. Duži AH i HB su poluprečnici kruga opisanog oko baze ABC. Dakle, $AH=BH=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Iz pravouglog $\triangle AHV$ slijedi $VH^2=VH^2-AH^2=a^2-\frac{a^2}{3}=\frac{2a^2}{3}$; $VH=\frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$, a $SH=\frac{a\sqrt{2}}{2\sqrt{3}}$. Duži SA, SB, SC su međusobno jednake. Iz pravouglog $\triangle SAH$ dobijamo: $SA^2=AH^2+SH^2=\frac{a^2}{3}+\frac{a^2}{6}=\frac{a^2}{2}$; $SA=\frac{a}{\sqrt{2}}$. Dokazaćemo da je $SA^2+SB^2=AB^2$. Zaista: $SA^2+SB^2=\frac{a^2}{2}+\frac{a^2}{2}=a^2=AB^2$. Dakle, na osnovu obratne Pitagorine teoreme, slijedi da je $\triangle ABS$ pravougli i $SA\perp SB$. Slično se dokaže i da je $SA\perp SC$ i $SB\perp SC$.

289. Neka su a i b prva dva broja. Sljedeća četiri su $a+b$, $a+2b$, $2a+3b$ i $3a+5b$. Peti broj $2a+3b$, može biti 7 samo ako je $b=1$, pa je $a=2$. Zbir je $8a+12b=28$.

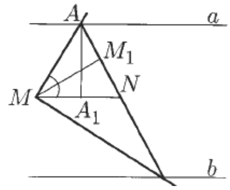
290. Neka je pola trupa teško x kg. Tada je trup težak $2x$, a glava $(2+x)\ kg$, pa je $2x=2+2+x$; odakle je $x=4$, pa je som težak $2+2x+2+x=4+3x=16\ kg$.

291. Neka su P, Q, R i S redom središta duži AB, CD, MA i DN, sl. 110. i neka je $AB=x$, $MA=y$, $DN=z$. Kako je, prema uslovima zadatka je $PQ=2x=28\ cm$ i $RS=\frac{y}{2}+3x+\frac{z}{2}=51\ cm$, odakle je $x=14$ i $y+z=18\ cm$, pa je $MN=y+z+3x=60\ cm$.

292. Neka je x broj ljudi koji znaju oba jezika. Tada $85-x$ ljudi zna samo francuski jezik, pa je $75+10+85-x=100$, odakle dobijamo $x=70$.

293. Zbir cifara može biti 7, a proizvod 6 samo ako su u pitanju cifre 6 i 1 ili 3, 2, 1 i 1. Traženi broj je paran, pa imamo 4 kandidata:16, 3112, 1312 i 1132. Broj 1132 nije djeljiv sa 8, a ostali jesu.

Sl. 110



Sl. 111

294. Proširivanja datog razlomka brojem x dobijamo $\frac{3x}{8x}$, pa je $3x+8x=374$; $x=34$, a traženi razlomak je $\frac{3\cdot 34}{8\cdot 34}=\frac{102}{272}$.

295. Za jedan sat prvi radnik završi jednu osminu, drugi jednu četvrtinu, a oba zajedno $\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$ posla. Ako su zajedno radili x sati, onda je $\frac{3}{8}\cdot x+\frac{1}{4}\cdot 1=1$; $x=2$.

296. Neka je N središte duži AB, sl. 111. Duž MN je hipotenuzina težišna linija, pa je $MN=AN$. Neka su AA_1 i MM_1 visine jednakokrakog trougla AMN. One su jednake, pa je rastojanje tačke M od prave AB uvijek jednako polovini rastojanja između pravih a i b.

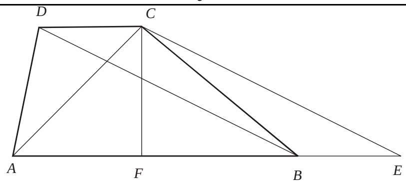
297. *a*) $P(x)=2x^3+5x^2+2x=x(2x^2+5x+2)=x(2x^2+x+4x+2)=x(x(2x+1)+2(2x+1)=x(2x+1)(x+2)$. *b*) Kako je $P(2)=40$ i $P(3)=105$, to je $NZD(40,105)=5$.

298. $x^2+y^2-6x+4y+1013=(x^2-6x+4)+(y^2+4y+4)+1000=(x-3)^2+(y+2)^2+1000$. Ka-ko je $(x-3)^2\geq 0$ i $(y+2)^2\geq 0$, to je najmanja vrijednost polinoma jedanka 1000. Ona se dostiže za $x=3$, $y=-2$.

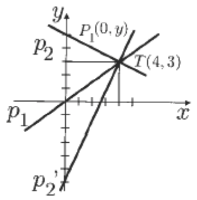
299. Spoljašnji ugao pravilnog n-tougao jednak je $\frac{360^0}{n}$. Iz uslova zadatka je

$\frac{360^0}{n}=\frac{360^0}{n+3}+10$. Sređivanjem ove jednačine dobija se $n(n+3)=9\cdot 12$, pa je $n=9$. Broj dijagonala devetougla je $D_n=\frac{n\cdot(n-3)}{2}=\frac{9\cdot(9-3)}{2}=27$.

300. Neka je E tačka na produžetku osnovice AB, takva da je $BE=DC$, sl. 112. Četverougao $BECD$ je paralelogram, pa je $EC=BD=d_2$ i $AE=AB+BE=AB+CD$. Površina trapeza je $P=\frac{1}{2}\cdot(AB+VD)\cdot h$, gdje je $h=12\ cm=CF$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle ACF$: $AF^2=AC^2-CF^2=d_1^2-h^2=225-144=81$; $AF=9\ cm$. Slično, iz $\triangle CEF$ računamo: $EF=16\ cm$. Dakle, $a+b=AE=AF+FE=25\ cm$, pa je: $P=\frac{1}{2}\cdot 25\cdot 12=150\ cm^2$.



Sl. 112



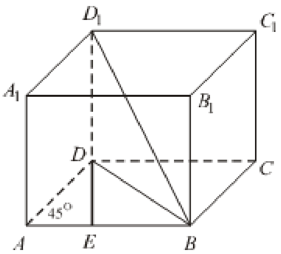
Sl. 113

301. Traženi broj je oblika $\overline{9abcde}$ i neka je $x = \overline{abcde}$. Iz uslova zadatka važi $900000+x=4\cdot(10x+9)$, pa je $x=23076$. Dakle, 923076 je traženi broj.

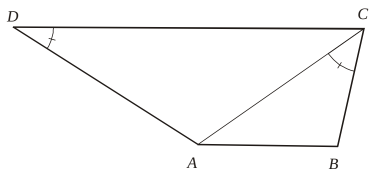
302. Neka je $y=kx$ linearna funkcija, koja sadrži tačke $O(0,0)$ i $T(4,3)$, sl. 113. Tada je $y = \frac{3}{4}x$. x. Ako druga linearna funkcija odsijeca na y osi duž $OY=|y|$, onda je površina trougla: $P = \frac{1}{2}\cdot|y|\cdot 4 = 10$, pa je $|y|=5$, tj. $y = \pm 5$. Druga funkcija, pored tačke T, sadrži tačku $P_1(0,5)$ ili tačku $P_2(0,-5)$.
Njena jednačina je $y = -\frac{1}{2}x + 5$ ili $y = 2x - 5$.

303. Neka je DE visina osnove paralelopipeda, sl. 114. Trougao ADE je jednakokraki pravougli, pa je $AE=DE=3$, a $EB=5-3=2$. Za pravougle trouglove EBD i BDD_1 važi: $BD = \sqrt{EB^2 + ED^2} = \sqrt{13}$; $DD_1 = \sqrt{BD^2 - BD^2} = \sqrt{49-13} = 6\ cm$, pa je zapremina tijela: $V = \frac{AB\cdot DE}{2}\cdot DD_1 = \frac{5\cdot 3}{2}\cdot 6 = 45\ cm^3$.

304. Ako je $AB=4x$, onda je $CD=9x$, sl. 115, pa iz $\frac{AB+CD}{2} = \frac{4x+9x}{2} = 13$ je $x=2\ cm$, te je $AB=8\ cm$ i $CD=18\ cm$. Kako je $\sphericalangle ADC=\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle DCA=\sphericalangle CAB$ (naizmjenični uglovi), pa je $\triangle ACD\cong\triangle BAC$ i važi $AC:AB=CD:AC$; $AC^2=AB\cdot CD=8\cdot 18$; $AC=12\ cm$.



Sl. 114



Sl. 115

305. *a*) Samo prvi zadatak riješilo je $25-20=5$ učenika. *b*) Na takmičenju je učestvovalo $37+5=32$ učenika.

306. Neka je $\frac{p}{q}$ traženi razlomak. Iz $\frac{7}{9} < \frac{p}{q} < \frac{8}{9}$ dobijamo $\frac{7q}{9} < p < \frac{8q}{9}$. Kako je $1 < \frac{14}{9} < \frac{16}{9} < 2$, to za $q=2$ ne postoji prirodan broj p veći od $\frac{14}{9}$, a manji od $\frac{16}{9}$. Slično je za $q=3$ i $q=4$. Za $q=5$ između $\frac{35}{9}$ i $\frac{40}{9}$ je prirodan broj $p=4$. Slično, nalazimo: za

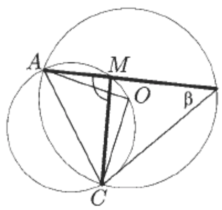
q=6 je p=5, za q=7 je p=6, za q=8 je p=7. Za q=9 ne postoji prirodan broj p, koji zadovoljava uslov. Traženi razlomci su: $\frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \frac{6}{7}$ i $\frac{7}{8}$.

307. Neka je x traženi ugao. Njegov suplementni ugao je 180^0-x, a komplementni: 90^0-x. Iz $(180^0-x)-x=x-(90^0-x)$ dobijamo $x = \frac{27^0}{4} = 67^0\ 30'$.

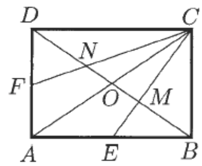
308. Neka je posljednji radnik radio x dana. Prvi je radio $5x$ dana, pretposljednji $2x$ dana, a ostali $3x$ i $4x$ dana. Dakle, radilo je 5 radnika. Za završetak posla potrebno je $24\cdot5=120$ radnih dana. Radili su $5x+4x+3x+2x+x=15x$ dana. Rješenje jednačine $15x=120$ je $x=8$, pa će posao biti završen za $5\cdot8=40$ dana.

309. Neka je x broj koji se dobije kad se početnom broju izbriše prva cifra 2. Početni broj je $200000+x$, a dobijeni $10x+2$. Iz $10x+2=3\cdot(200000+x)$ dobijamo $x=85714$, pa je traženi broj 285714.

310. Neka je radniku A potrebno x dana da završi posao, radniku B, y dana, a radniku C, z dana. Za jedan dan radnik A završi $\frac{1}{x}$ posla, B završi $\frac{1}{y}$, a C $\frac{1}{z}$ posla. Iz $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{20}$ i $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{15}$ i $\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{12}$. Sabiranjem i sređivanjem ovih jednakosti je: $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{10}$, pa je $\frac{1}{x}=\frac{1}{10}-\left(\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{60}$. Takođe važi $\frac{1}{y}=\frac{1}{10}-\frac{1}{15}=\frac{1}{30}$ i $\frac{1}{z}=\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{20}$. Radnik A završio bi posao za 60, radnik B za 30, a radnik C za 20 dana.



Sl. 116



Sl. 117

311. Neka je $\sphericalangle ABC$=β, sl. 116. Tada je $\sphericalangle AOC$=2β, kao centralni ugao nad lukom, nad kojim je periferijski $\sphericalangle ABC$, a $\sphericalangle AMC=\sphericalangle AOC$ kao periferijski uglovi nad istim lukom drugog kruga. Kako je $\sphericalangle AMC$ spoljašnj ugao $\triangle CBM$, to je $\sphericalangle MCB=\sphericalangle AMC-$β$=\sphericalangle AOC-$β=2β–β=βn i $\triangle CBM$ jednakokraki, te je $MB=MC$.

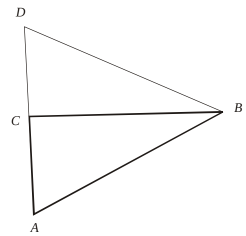
312. Neka duž BC siječe duži CE, CA i CF u tačkama M, O i N, tim redom, sl. 117. Kako se dijagonale pravougaonika polove, to je O središte duži AC pa su M i N težišta trouglova ABC i ACD. Dakle, $BM=\frac{2}{3}BO=\frac{1}{3}BD$, a $DN=\frac{2}{3}DO=\frac{1}{3}BD$, pa je i $MN=\frac{1}{3}BD$, odnosno $BM=MN=ND$.

313. Neka je $\overline{abcd}$ traženi broj. Iz jednakosti $\overline{abcd}\cdot 9=\overline{dcba}$, , slijedi a=1, jer bi u protivnom proizvod na lijevoj strani bio petocifren. Proizvod $9\cdot d$ se završava cifrom 1, pa je d=9. Navedena jednakost postaje $\overline{abcd}\cdot9=\overline{dcba}=\overline{9cb1}$. Cifra b

je manja od 2, jer bi u protivnom proizvod na lijevoj strani bio petocifren. Za b=1, proizvod $\overline{c9}\cdot 9$ završava se sa 11, zbir $9\cdot c+8$ sa 1, proizvod $9\cdot c$ sa 3, pa je c=7. Kako je $1179\cdot 9\neq 9711$, to u ovom slučaju zadatak nema rješenja. Za b=0, proizvod $\overline{c9}\cdot 9$ završava se sa 01, zbir $9\cdot c+8$ sa 0, proizvod $9\cdot c$ sa 2, pa je c=8. Lako se provjerava da je $1089\cdot 9=9801$.

314. $P(x)=x^3+3x^2-x-3=x^2(x+3)-(x+3)=(x+3)(x^2-1)=(x+3)(x+1)(x-1)$. Ako je x neparan prirodan broj, onda je $P(x)$ proizvod tri uzastopna parna broja, pa je jedan od njih djeljiv sa 4, a jedan sa 3. Dakle, $P(x)$ je djeljiv sa $2\cdot 2\cdot 4\cdot 3=48$.

315. Iz $\alpha:\beta=2:1$ i $\alpha+\beta=90^0$, dobijamo $\alpha=2t$ i $\beta=t$, odnosno $2t+t=90^0$, tj. $t=30^0$, te je $\alpha=60^0$ i $\beta=30^0$. Trougao ABC je polovina jednakostraničnog $\triangle ABD$, sl. 118, pa je $AC=\frac{AB}{2}=2\ cm$ i $BC=\frac{AB\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}\ cm$. Površina trougla ABC:
$P=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot h$, odnosno $P=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC$, pa je $h=\frac{AC\cdot BC}{AB}=\frac{2\cdot 2\sqrt{3}}{4}=\sqrt{3}\ cm$.



Sl. 118

316. Kako je $a=3k+r_1=5l+r_2=7m+r_3$, to je $r_1=a-3k$, $r_2=a-5l$ i $r_3=a-7m$, pa je $70r_1+21r_2+15r_3-a=70(a-3k)+21(a-5l)+15(a-7m)-a=105a-210k-105l-105m=105(a-2k-l-m)$, pa je navedeni broj djeljiv sa 105.

317. Neka je Goran ponio x KM. Prije sniženja bicikl je koštao $\frac{5}{6}x\ KM$, a poslije sniženja $\frac{5}{6}x-\frac{10}{100}\cdot\frac{5}{6}x=\frac{3}{4}x$. Nakon kupovine bicikla Goranu je ostalo $x-\frac{3}{4}x=\frac{1}{4}x$ KM, a poslije časćavanja trgovca $\frac{1}{4}x-\frac{5}{100}\cdot\frac{1}{4}x=\frac{19}{8}x$, pa je $\frac{19}{8}x=76\ KM$; x=320 KM.

318. Iz $2b=c+a$ slijedi $c=2b-a$, pa je $a^2+b^2=c^2=4b^2-4ab+a^2$, odnosno $ab=\frac{3b^2}{4}$, pa je, zbog $\frac{ab}{2}=54$, $b^2=144$, odnosno $b=12\ cm$; $a=\frac{2\cdot 54}{6}=9\ cm$ i $c=2b-a=15\ cm$.

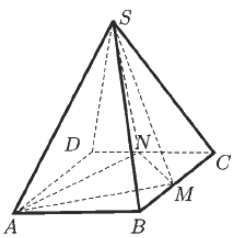
319. $x^2-xy-2y^2=x^2+xy-2xy-2y^2=x(x+y)-2y(x+y)=(x+y)(x-2y)$, to se data jednačina svodi na $a\cdot b=18$, gdje je $a=x+y$ i $b=x-2y$. Tada je $2a+b=3x$. Kako su a i b cijeli brojevi, razmotrićemo sve slučajeve kad je 18 djeljivo sa a, zatim b=18: a i $2a+b$ djeljivo sa 3. Za a=1, b=18 je $2a+b$=20. Za a=2, b=9, $2a+b$=13. Za a=3, b=6 je $2a+b=3x$=12. Tada je x=4, $y=a-x=-1$. Za a=6, b=3 je $2a+b=3x$=15, pa je x=5, $y=a-x$=1. Za a=9, b=2 je $2a+b$=20. Za a=18, b=1 je $2a+b$=37. U slučaju kad su a i b pozitivni, dobili smo rješenja (4,–1), (5,1). Dobijamo još dva rješenja (–4,1), za a= –3 i (–5,–1) za a= –6.

320. Piramide $SABCD$ i $SAMN$ imaju jednake visine H=10 cm, sl. 119. Baza piramide $SAMN$ dobije se kad se od kvadrata odsijeku tri trougla i dalje računamo: $B = 6^2 - 2 \cdot \frac{6\cdot 3}{2} - \frac{3\cdot 3}{2} = \frac{27}{2}\ cm^2$, $V = \frac{B\cdot H}{3} = \frac{27}{2} \cdot \frac{10}{3} = 45\ cm^3$.

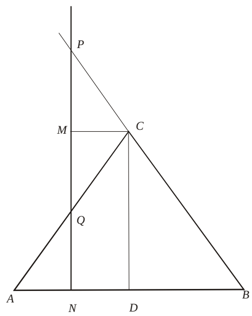
321. Poznat je stav: prirodan broj i broj jednak zbiru njegovih cifara daju iste ostatke pri dijeljenju sa 3 (0, 1 ili 2). Zbirovi cifara brojeva m i n su jednaki, pa pri dijeljenju sa 3 daju isti ostatak. Zato je njihova razlika djeljiva sa 3, a broj 2002 nije, pa $m–n$ ne može biti jednak 2002.

322. Neka u grupi ima x učenika od kojih y djevojčica. Iz uslova zadatka je $2 \le y < \frac{3}{10}x$. Dobijena dvostruka nejednačina će imati cjelobrojna rješenje ako $2 < \frac{3}{10}x$, odnosno $x > \frac{20}{3}$. Najmanje cjelobrojno rješenje je x=7, y=2. Dakle, najmanji broj članova grupe učenika je 7.

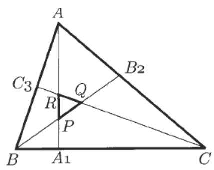
323. Ako je N=D, onda je P=Q=C i QN=PN=CD, pa je tvrđenje očigledno. Dokažimo tvrđenje u slučaju kada je N između A i D (u slučaju kada je N između B i D dokaz je sličan). Neka je CM visina $\triangle PQC$, sl. 120. Četverougao $NDCM$ je pravougaonik, pa je MN=CD. Prave PN i CD su paralelne, pa je $\measuredangle MQC$=$\measuredangle ACD$ (naizmjenični uglovi) i $\measuredangle MPC$=$\measuredangle DCB$ (saglasni). Kako je $\measuredangle ACD$=$\measuredangle DCB$, to je $\measuredangle MPC$=$\measuredangle MQC$ pa podnožje M visine jednakokrakog $\triangle PQC$, je središte osnovi-ce PQ. Zato je NP+NQ=(NM+MP)+(NM–MQ)=2NM+ (MP–MQ)=2NM=2CD, jer je MP=MQ i MP–MQ=0.



Sl. 119



Sl. 120



Sl. 121

324. Neka se visina AA_1, simetrala BB_2 i težišna duž CC_3 sijeku u tačkama P, Q i R, sl. 121, i neka je $\triangle PQR$ jednakostraničan. Tada je $\measuredangle BPA_1$=$\measuredangle RPQ$=60°, pa je $\measuredangle B_2BA$=$\measuredangle B_2BC$=90°–$\measuredangle BPA_1$=30° i $\measuredangle ABC$=60°. Dalje je $\measuredangle CC_3B$=180°–$\measuredangle C_3QB$–$\measuredangle C_3BB_2$=90°. U $\triangle ABC$ duž CC_3 je i visina i težišna duž, pa je $\triangle ABC$ jednakokraki sa uglom na osnovici $\measuredangle ABC$=60°, odnosno $\triangle ABC$ je jednakostraničan, što je suprotno uslovu zadatka. Dakle, $\triangle PQR$ ne može biti jednakostraničan.

325. Prema uslovu zadatka je $\overline{abc} = 100a + 10b + c = 5abc$, pa je c=5(abc–20a–2b). Dakle, cifra c je djeljiva sa 5. Za c=0 dobijamo 5·a·b·0=0, pa broj $\overline{abc}$ nije trocifren. Dakle, c=5, pa je 100a+10b+c=25ab, odnosno 2b+1=5a(b–4). Broj 2b+1 je neparan, manji od 20 i djeljiv sa 5, odnosno jednak 5 ili 15, pritom je

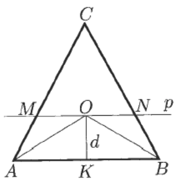
$b-4>0$, tj. $b>4$. Iz $2b+1=5$ slijedi $b=2<4$, što nije moguće. Iz $2b+1=15$ slijedi $b=7$, a iz $2\cdot7+1=5a(7-4)$ slijedi $a=1$. Dakle, 175 je jedini trocifreni broj koji je pet puta veći od proizvoda svojih cifara.

326. $P(x,y,z)=x^2-8x\ +4^2-16+(2y)^2++28y+7^2-49+(5z)^2-30z+3^2-9+2076=(x-4)^2+(2y+7)^2+(5z-3)^2+2002\geq 2002>0$, za sve vrijednosti x, y, z. Najmanju vrijednost, 2002, polinom ima za $x-4=2z+7=5z-3=0$, tj. $x=4$, $y=-\frac{7}{2}$, $z=\frac{3}{5}$.

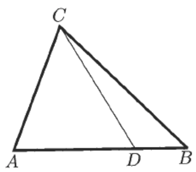
327. a) Prava AO je simetrala $\sphericalangle BAC$, pa je $\sphericalangle BAO=\sphericalangle OAM$, sl. 122. Dalje je $\sphericalangle BAO=\sphericalangle AOM$ (naizmjenični uglovi), pa je $\sphericalangle OAM=\sphericalangle AOM$. Slijedi da je $\triangle AOM$ jednakokraki, pa je $AM=OM$. Na sličan način se dokazuje da je $BN=ON$, pa je $MN=OM+ON=AM+BN$. b) Neka je $OK=d$ visina $\triangle ABO$. Tada je $\sphericalangle KAO=\frac{1}{2}\sphericalangle KAM=\frac{1}{2}(180^0-\sphericalangle OMA)=30^0$, pa je $\triangle AOK$ polovina jednakostraničnog trougla, pa je $AO=2d$ i $AK=2d\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kako je ABC jednakokraki trougao, to je $\sphericalangle KBN=\sphericalangle KAN=60^0$; $BO=AO$; $BK=AK$. Obim je $OA+OB+AB=4d+2d\cdot\sqrt{3}$.

328. Prema oznakama na sl. 123 važi $O_{ABC}+2CD=(AD+DC+CA)+(DB+BC+CD)=O_{ADC}+O_{DBC}$, pa je $CD=\frac{1}{2}\cdot(55+45-60)=20\ cm$.

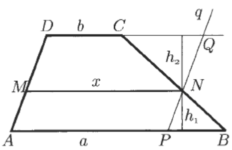
329. Dva najveća zbira su $c+d=10$ i $b+d=9$, a dva najmanja $a+b=1$ i $a+c=2$. Iz posljednje dvije jednakosti dobijamo $c-b=1$. Zbir $b+c$ može biti ili 5 ili 6. Ako je zbir $b+c=5$, onda iz $c-b=1$ slijedi: $c=3$, $b=5-3=2$, $a=1-b=-1$ i $d=10-c=7$. Ako je $b+c=6$, onda iz $c-b=1$ slijedi $c=\frac{7}{2}$, $b=6-c=\frac{5}{2}$, $a=1-b=-\frac{3}{2}$ i $d-c=\frac{13}{2}$. Postoje dva rješenja: -1, 2, 3, 7 ili $-\frac{3}{2}$, $\frac{5}{2}$, $\frac{7}{2}$, $\frac{13}{2}$. (Provjeriti tvrdnje da se u oba slučaja dobije šest navedenih zbirova.)



Sl. 122



Sl. 123



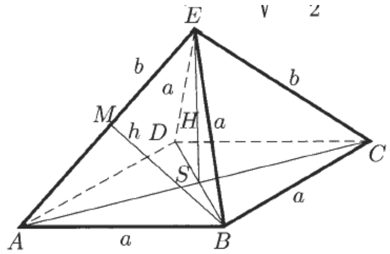
Sl. 124

330. Kako je $\frac{a^2+1}{a-1}=\frac{a^2-1+2}{a-1}=\frac{(a-1)(a+1)+2}{a-1}=a+1+\frac{2}{a-1}$, to je dati izraz cijeli broj kad $a-1\in\{-2,-1,1,2\}$, tj. $a\in\{-1,0,2,3\}$.

331. Neka je $MN=x$ i neka prava q, koja sadrži tačku N i paralelna je pravoj AD, siječe prave AB i CD, redom, u tačkama P i Q, sl. 124. Neka je h_1 visina trapeza $ABNM$ (i $\triangle PBN$), a h_2 visina trapeza $MNCD$. Iz sličnosti trouglova PBN i QCN (imaju jednake uglove) slijedi $\frac{h_1}{h_2}=\frac{PB}{QC}=\frac{a-x}{x-b}$. Iz jednakosti površina trapeza $ABNM$ i $MNCD$ dobijamo: $\frac{a+x}{2}\cdot h_1=\frac{x+b}{2}\cdot h_2$; $\frac{x+b}{a+x}=\frac{h_1}{h_2}$. Slijedi da je $\frac{x+b}{a+x}=\frac{a-x}{x-b}$, tj. $x^2-b^2=a^2-x^2$. Odavde je $2x^2=a^2+b^2$ i na kraju $x=\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$.

332. Neka je $ABCDE$ data piramida, S presjek dijagonala osnove, BM visina trougla EAB i neka je $\sphericalangle DAB = 60^0$, sl. 125. Trougao ABD je jednakostraničan, pa je $DB = a$ i $AS = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Visina piramide ES je visina jednakostraničnog $\triangle DBE$, pa je $H = ES = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Trougao ASE je jednakokraki pravougli sa krakom H, pa je njegova hipotenuza $b = AE = H\sqrt{2} = \frac{a\sqrt{6}}{2}$. Trougao EAB je jednakokraki. Primjenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle ABM$: $h = BM = \sqrt{AB^2 - AM^2} = \sqrt{a^2 - \frac{a^2 \cdot 6}{16}} = \frac{a\sqrt{10}}{4}$.

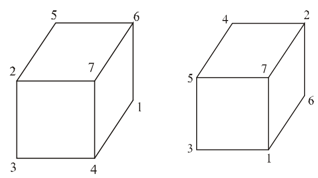
Dakle, $P = 2 \cdot P_{ABD} + 4 \cdot P_{EAB} = 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + 4 \cdot \frac{b \cdot h}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} + \frac{a\sqrt{6}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{10}}{2} = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \cdot \left(1 + \sqrt{5}\right)$ i $V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot 2 \cdot \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \cdot \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a^3}{24}$.



Sl. 125

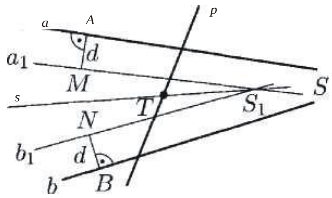
333. Tri devojčice će posle $900\ cm$ biti jednako udaljene od početne tačke, jer 900 je NZS za 75, 45 i 60. Na tom dijelu puta će Dragana načiniti 12 koraka i sljedeći korak započeti desnom nogom. Istovremeno će Mira završiti 20-ti korak i sljedeći započeti desnom nogom. Međutim, Sanja će završiti 15-ti korak i 16-ti započeti lijevom nogom. Ali, poslije još 900 pređenih centimetara, odnosno poslije 18 metara, računajući od početka, sve tri će istovremeno iskoračiti desnom nogom.

334. Na centralno mesto, gdje je u navedenom primjeru broj 1, možemo postaviti svaki od datih brojeva, osim broja 4, sl. 126. Brojevi koji se dva puta računaju (u navedenom primjeru položaji brojeva 2, 3 i 4) treba da daju zbir 12. Tada se ostali rasporede "automatski". Navodimo rješenja za slučaj centralnih brojeva 2 i 7. (Objasnite zbog čega je bitan zbir 12 i zašto ne može centralni broj da bude 4.)

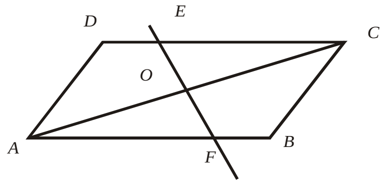


Sl. 126

335. Knjiga ima x stranica. Iz uslova zaključujemo da je polovina knjige za 15 stranica veća od trećine. Kako $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$, slijedi $\frac{x}{6}=15$, pa je x=90.



Sl. 127



Sl. 128

336. Uglovi α i β sa normalnim kracima, ako nisu jednaki, moraju biti suplementni. Kako je α=β+15°30'18", to iz α+β=180° dobijamo β+15°30'18"+β =180°, odakle je 2β=164°29'42". Dakle: β=82°14'51", pa je α= 97°45'9".

337. Prvi automobil za 1 čas pređe 280 : 4=70 km, pa će za 7 časova preći 490 km. Slično izračunamo da drugi automobil za 7 časova pređe 770 km. Dakle, rastojanje između dva grada je 490 km +770 km=1260 km.

338. Traženi zbir je: 10+11+12+...+54+55+...+97+98+99=(10+99)+(11+98)+ (12+97)+...+(54+55)=45·109=4905.

339. Tačka T je presjek prave p i simetrale s ugla kojeg određuju druge dvije date prave, označimo ih sa a i b, sl. 127. Presječna tačka S pravih a i b je van crteža, pa ćemo prvo konstruisati prave a_1 i b_1, paralelne sa a i b, koje su od a i b jednako udaljene (na slici za $AM=BN=d$). Simetrala s ugla MS_1N je istovremeno i simetrala ugla ASB (objasniti), pa se s i p sijeku u tački T.

340. $\frac{a}{9}+\frac{4b}{5}+\frac{2a}{3}-\frac{3b}{10}=\left(\frac{1}{9}+\frac{2}{3}\right)a+\left(\frac{4}{5}-\frac{3}{10}\right)b=\frac{7}{9}a+\frac{1}{2}b=\frac{7}{9}\cdot\frac{3}{7}+\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{2}{3}\right)=0.$

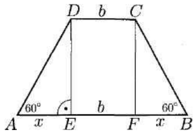
341. Neka je bilo x učenika. Kako je $\frac{x}{2}+\frac{x}{4}+\frac{x}{7}=\frac{25}{28}$, slijedi da preostala 3 učenika čine $\frac{3}{28}x$, pa je $\frac{1}{28}x=1$, odnosno $x=28$. Dakle, bilo je 28 učenika, od kojih 14 uči matematiku, 7 muziku, a 4 učenika ćute i razmišljaju.

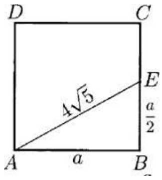
342. Paralelogram je centralno simetrična figura, sa centrom simetrije O, sl. 128, pa je zbog toga $EO=OF$.

343. Neka je x data suma. Tada je 0,95x–90=3·160, tj. x=570:0,95=600 KM.

344. Neka su DE i CF visine trapeza, sl. 129. Označimo $AE=BF=x=\frac{a-b}{2}$. Pravougli $\triangle AED$ je polovina jednakostraničnog trougla, pa je AD=2x=BC. Obim trapeza je O=AB+CD+BC+AD=a+b+2x+2x=a+b+4x=a+b+2(a–b). Dakle, O=3a–b.

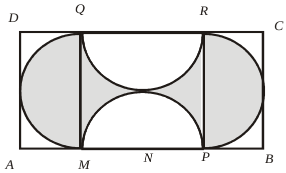
345. Stranice pravouglog $\triangle ABE$ su: a, $\frac{a}{2}$i $4\sqrt{5}$, sl. 130, pa je $a^2+\left(\frac{a}{2}\right)^2=\left(4\sqrt{5}\right)^2$; a=8 cm. Dakle, obim: O_{ABCD}=32 cm; površina: P_{ABCD}=64 cm^2.





Sl. 129 Sl. 130

346. Tražena površina je jednaka površini kvadrata $MPRQ$, sl. 131, stranice $MP = \frac{a}{2}$, jer polukrugovi nad prečnicima MQ i PR su podudarni sa polukrugovima nad prečnicima MP i QR. Dakle, $\left(\frac{a}{2}\right)^2 = \frac{a^2}{4}$.



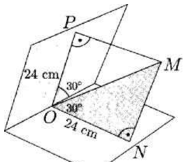
Sl. 131

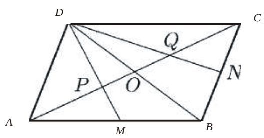
347. a) $P(x)=x^3+5x^2+3x-9=x^3+6x^2+9x-x^2-9=x(x^2+6x+9)-(x^2+6x+9)=(x^2+6x+9)\cdot(x-1)=(x+3)^2\cdot(x-1)$. b) Ako je x neparan broj, $x+3$ i $x-1$ su parni. Neka je $x+3= 2m$ i $x-1=2n$. Tada je $P(x)=(2m)^2\cdot 2n=8m^2n$, a to je deljivo sa 8.

348. Očigledno je M u simetralnoj ravni diedra, sl. 132. pa je $\sphericalangle MON=30^O$ i pravougli $\triangle MON$ je polovina jednakostraničnog trougla. Rastojanje je OM. Kako je $ON = \frac{OM\sqrt{3}}{2}$, to je $OM = \frac{2\cdot ON}{\sqrt{3}} = \frac{48}{\sqrt{3}} = 16\sqrt{3}\ cm$.

349. Ako je x nepoznati broj, tada je $x - \left(\frac{x}{2} - 3{,}5\right) = 3x + 15x$, pa je $x = -\frac{23}{3}$.

350. Iz uslova je $b=a-10$, i $c=a-5$, pa iz obima nalazimo a: $a+(a-10)+(a-5)=90$; $a=35\ cm$, pa je $b=25\ cm$ i $c=30\ cm$. Za stranice a_1, b_1, c_1 sličnog trougla važi: $a_1:a=b_1:b=c_1:c=O_1:O=72:90=4:5$. Iz $a_1:35=4:5$ je $a_1=28\ cm$. Slično dobijamo i ostale stranice: $b_1=20\ cm$ i $c_1=24\ cm$.





Sl. 132 Sl. 133

351. Neka su M i N središta stranica AB i BC, sl. 133. Dijagonale AC i BD se polove. Onda, u $\triangle ABD$ težišne duži su AO i DM. Tačka P je težište trougla pa je $OP = \frac{AO}{3} = \frac{AC}{6}$, a $AP = \frac{2\cdot AO}{3} = \frac{AC}{3}$. Slično se dokaže da je tačka Q težište $\triangle BCD$, te je $CQ=\frac{AC}{3}$. Dakle, tačke P i Q dijele dijagonalu AD na tri jednaka dijela.

352. Kad se svi brojevi u proizvodu rastave na proste činioce, dobićemo izvjestan broj činilaca 5 i činilaca 2. Kako je $2\cdot 5=10$, to će svaki ovakav par proizvesti na kraju nulu u krajnjem proizvodu. Dvojki ima više nego petica, pa će broj nula biti jednak broju petica datog proizvoda $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot\ldots\cdot 45\cdot 46\cdot 47\cdot 48\cdot 49$. Svaki peti broj u ovom nizu je djeljiv sa 5. Takvih brojeva ima 9. U broju 25 ima viška jedna petica, pa je petica ukupno 10. Dakle, proizvod se završava sa 10 nula.

353. Neka prvi utorak pada u a-ti dan u mjesecu. Datumi ostalih utoraka su: $a+7$. $a+14$, $a+21$, i, možda, $a+28$. Kako su, prema uslovima zadatka, tri utorka u parne datume to a, $a+14$ i $a+28$ moraju biti parni datumi, pa je $a=2$. Posljednji utorak u mjesecu pada 30-og, a posljednji petak 4 dana ranije, tj. 26-tog.

354. Uglovi α i β su jednaki ili suplementni. Ako su jednaki onda je njihov zbir $4006'=66^o46'$, a ako su suplementni onda im je zbir 180^o.

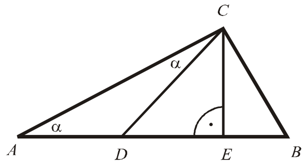
355. Neka su to brojevi a i b, pa je $2652=a\cdot b$ i $2244=(a-2)\cdot b=a\cdot b-2b=2652-2b$, te važi $2b=2562-2244=408$, pa je $b=204$. Riječ je o brojevima a=2562:204=13 i $b=204$.

356. a) Ako su x i y dužine stranica, onda je $x+y=1001=1+1000=2+999=\ldots=500+5001$, Dakle, ima 500 različitih traženih pravougaonika.
b) Uslov je $x\cdot y=2002=1\cdot 2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, pa je $x\cdot y=1\cdot 2002=2\cdot 1001=7\cdot 286=11\cdot 182=13\cdot 154=4\cdot 143=22\cdot 91=26\cdot 77$; te ima 8 različitih pravougaonika.

357. U ribnjaku ne može ostati sedam ili više štuka, jer bi one, da bi se zasitile morale pojesti 21 ili više štuka, što znači da bi u početku u ribnjaku bilo najmanje 28 štuka, a ne 25. U ribnjaku će ostati 6 štuka ako neka štuka pojede jednu štuku, a zatim nekih drugih 6 pojede $6\cdot 3=18$ preostalih, uključujući i onu koja je pojela prvu štuku.

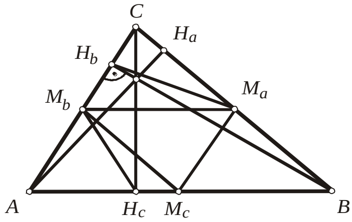
358. Neka između mesta A i B ima n kilometara. Broj n nije jednocifren jer bi u protivnom zbir cifara na stubu u mjestu A bio $0+n=n<13$. Broj n nema više od dvije cifre jer bi tada, na 89-tom kilometru od mesta A zbir cifara na stubu bio veći ili jednak $9+9=18$. Prema uslovima zadatka, na stubu u mestu A zbir cifara je jednak zbiru cifara broja n. Dakle, n je dvocifreni broj čiji je zbir cifara 13: 94, 85, 76, 67, 58 ili 49. Ako je $n=94$, onda će na jednom stubu biti brojevi 5 i 89, pa je zbir cifara na njemu $5+8+9>13$.Uočimo da je $85=6+79$ i $6+7+9>13$; $76=7+69$ i $7+6+9>13$; $67=8+59$ i $8+5+9>13$; $58=9+49$ i $9+4+9>13$. Dakle, brojevi 94, 85, 76, 67, 58 ne zadovoljavaju uslove zadatka. Direktnim provjeravanjem zaključujemo da je $n=49$, tj. da je 49 km rastojanje između mjesta A i B.

359. Neka su CE i CD redom visina i težišna duž koje odgovaraju hipotenuzi pravouglog $\triangle ABC$, sl. 134, i neka je $\sphericalangle CAE=\alpha=2003'=33^o23'$. Kako je $\alpha<45^O$, to se duž CD nalazi u uglu ACE. Trougo AEC je pravougli, a $\triangle ACD$ jednakokraki, pa je $\sphericalangle ACD=\sphericalangle CAD=\alpha$. U $\triangle ACD$ je $\sphericalangle CDE$ spoljašnji ugao, pa je $\sphericalangle CDE=2\alpha=66^o46'$. Dakle, $\sphericalangle ECD=90^o-66^o46'=23^o14'$.



Sl. 134

360. M_bM_c je srednja linija $\triangle BCA$ pa je $M_bM_c = \frac{MB}{2}$, sl. 135. M_aH_b je težišna duž pravouglog $\triangle BH_bC$, pa je: $M_aH_b = \frac{BC}{2} = M_bM_c$. Slično se dokazuje da važi $M_bH_c = M_cH_c$ i $M_cH_a = M_aM_b$, Dakle, duži M_aH_b, M_bH_c i M_cH_a su jednake stranicama $\triangle M_aM_bM_c$. Kako srednje linije dijele trougao na četiri podudarna trougla, to je $P_{M_aM_bM_c} = \frac{S}{4}$.



Sl. 135

361. Neka je $n_1 = \overline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$; $n_2 = \overline{dcba} = 1000d + 100c + 10b + a$, gdje su a, b, c, d cifre, $a \neq 0$ i $d \neq 0$. Tada je $n_1 - n_2 = 999(a-d) + 90(b-c) = 90$. Kako je zbir $a+d$ najmanji, to je $a=d=1$. Iz jednačine $999(a-d)+90(b-c)=90$, zbog $a=d=1$, slijedi $b-c=1$. Odavde dobijamo da su b i c dvije uzastopne cifre, a njihov zbir $b+c$ je najveći ako je $b=9$, $c=8$. Zbir $b+c$ ne može biti 18, jer je tada $b=c=9$ i $999(a-d)=90$ što je nemoguće, jer je broj $999(a-d)$ ili jednak nuli, ili veći od -998, ili manji od 998. Traženi broj je 1981.

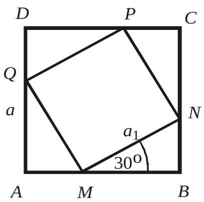
362. Iz $0<A<1$, $0<B<1$ i $0<C<1$ slijedi $1-A>0$, $0<1-B<1$, $0<1-C<1$, pa je $(1-B)\cdot(1-C)<0$, i važi $1-(1-A)\cdot(1-B)\cdot(1-C)=A+(1-A)-(1-A)\cdot(1-B)\cdot(1-C)=A+(1-A)\cdot[1-(1-B)\cdot(1-C)]>A$.

363. Sateliti redom obiđu Zemlju za 90, 105 i 120 minuta. Kako je 2520 najmanji zajednički sadržilac brojeva 90, 105 i 120, to će nad Sjevernim polom sva tri satelita biti istovremeno poslije 2520 minuta. Za to vrijeme prvi satelit će obići Zemlju 2520:90=28 puta.

364. $A=[(4a+5b)^2]^2-[(4a-5b)^2]^2-160ab(4a-5b)^2$;
$A=[(4a+5b)^2-(4a-5b)^2)]\cdot[(4a+5b)^2+(4a-5b)^2]-160ab(4a-5b)^2$;
$A=[(4a+5b)^2-(4a-5b)^2)]\cdot[(4a+5b)^2+(4a-5b)^2]-160ab(4a-5b)^2$;
$A=[(16a^2+40ab+25b^2)-(16a^2-40ab+25b^2)]\cdot[(4a+5b)^2+(4a-5b)^2]-160ab(4a-5b)^2$;
$A=80ab\cdot[(4a+5b)^2+(4a-5b)^2]-160ab(4a-5b)^2$;
$A=80ab\cdot[(4a+5b)^2+(4a-5b)^2-2\cdot(4a-5b)^2]$; $A=80ab\cdot 80ab$; $A=6400a^2b^2$.
Za $a=-1$ i $b=-2$ dobijamo A=256000.

365. Zadatak je tačno riješilo 100%–12%–32%=56% učenika. Neka je u razredu bilo x učenika. Tada je $\frac{56}{100} \cdot x = 14$, $x = 24$, tj. x=25. U razredu je bilo 25 učenika.

366. Neka je a=13, b=14, c=15. Izračunajmo, koristeći Heronov obrazac, površinu trougla stranica a, b, c,: $P = \sqrt{s \cdot (s-a) \cdot (s-b) \cdot (s-c)}$, gdje je $s = \frac{a+b+c}{2}$. Kako je, prema uslovima zadatka, s=21 to je P=84. Dakle, mjerni broj površine trougla je cijeli broj, što je i trebalo dokazati.



Sl. 136

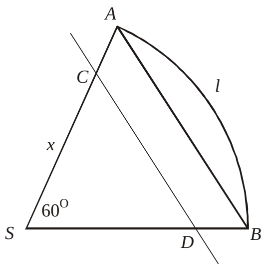
367. Neka su a i a_1 redom stranice kvadrata $ABCD$ i u njega upisanog kvadrata $MNPQ$; sl. 136, neka se tačke M, N nalaze redom na stranicama AB, BC i neka je $\sphericalangle BMN$=30°. Trougao NMB je polovina jednakostraničnog trougla stranice MN,pa je $BN = AM = \frac{a_1}{2}$ i $MB = \frac{a_1\sqrt{3}}{2}$. Odavde dobijamo $a = AM + MB = a_1\frac{1+\sqrt{3}}{2}$ i važi: $P = a^2 = {a_1}^2 \cdot \left(\frac{1+\sqrt{3}}{2}\right)^2 = P_1 \cdot \frac{2+\sqrt{3}}{2}$; $P_1 = \frac{2P}{2+\sqrt{3}}$; $P_1 \approx 0{,}54 \cdot P = 54\%P$.

368. Neka su x, y, redom, broj minuta za koje se buba kreće udesno, odnosno ulijevo. Tada je $47x$–$37y$=1, odnosno $y = \frac{47x-1}{37} = x + \frac{10x-1}{37}$. Kako y mora biti cijeli broj, to $10x$–1 mora biti djeljivo sa 37. Jedno rješenje je x_0=26 i y_0=33. Tada je x=37k+26, y=47k+33 (k∈N). Zbir x+y=84k+59 je najmanji za k=0, pa je najkraće vrijeme 59 minuta.

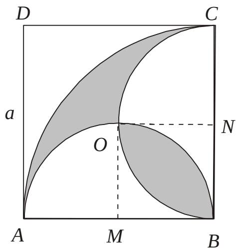
369. Neka je s udaljenost između mjesta A i B i neka je t vrijeme za koje motociklista pređe tu udaljenost. Prema uslovima zadatka, važi $t = \frac{s}{35} - 2$ i $t = \frac{s}{50} + 1$, odnosno $\frac{s}{35} - 2 = \frac{s}{50} + 1$; pa je 10$s$–700=7$s$+350. Rješavanjem ove jednačine dobijamo s=350. Udaljenost između mjesta A i B je 350 km.

370. Neka su prva dva broja a i b u nizu od šest datih prirodnih brojeva. Tada je, prema uslovima zadatka, a+b treći, a+2b četvrti, 2a+3b peti i 3a+5b šesti broj. Izračunajmo zbir ovog niza: a+b+(a+b)+(a+2b)+(2a+3b)+(3a+5b)=8a+12b)= 4(2a+3b)=4·7=28, jer je 2a+3b=7.

371. Dužina luka AB jednaka je jednoj šestini obima kruga poluprečnika 12 cm, pa je $l = \frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 12\pi = 4\pi$. Neka je CS=x, sl. 137. Kako su trouglovi SDC i SAB jednakostranični, to je SD=CD=x i DB=AC=12–x. Dalje, prema uslovima zadatka je 3x=x+2(12–x)+4π, odnosno $x = (6 + \pi)cm$.



Sl. 137



Sl. 138

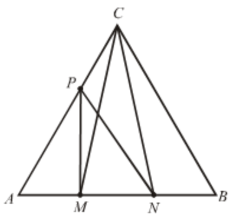
372. U kvadratu $OMBN$ je $AB = \frac{a}{2}$, sl. 138. Zbir površina isječaka AMO i NCO jednak je površini polovine kruga poluprečnika $\frac{a}{2}$. Površinu P ćemo dobiti ako od površine četvrtine kruga poluprečnika AB oduzmemo površine dva isječaka AMO i NCO i neosjenčeni dio kvadrata $OBMN$:

$$P = \frac{a^2\pi}{4} - \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi - 2\cdot\left(\left(\frac{a}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}\cdot\left(\frac{a}{2}\right)^2 \pi\right) = \frac{1}{2}\cdot a^2\cdot\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) \approx 10{,}26\ cm^2.$$

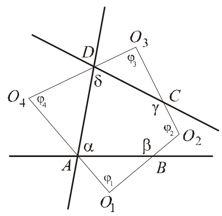
373. Najmanji zajednički sadržilac brojeva 2, 3, 4, 5 i 6 je 60 te svaki broj oblika $60k+1$ ($k\in \boldsymbol{N_0}$) pri dijeljenju sa brojevima 2, 3, 4, 5 i 6 daje ostatak 1. Prva vrijednost k=5 daje broj 301 što je djeljivo sa 7, ali i svaka druga vrijednost k=5+7m, $m\in \boldsymbol{N_0}$, daje brojeve djeljive sa 7, te za m=4, tj. k=33 dobijamo broj 1981, koji je najbliži broju 2003 jer je sljedeći veći od 2003, koji ispunjava navedene uslove, 2401 (m=5, k=40).

374. Pošto buba treba da pređe 36 dm ili 3600 mm to njoj treba ukupno 240^0 sekundi za taj put. Za to vrijeme vrh minutne kazaljke će opisati luk od 240^0.

375. a) $\boldsymbol{\Delta} ANP$ je jednakostraničan, pa je duž MN njegova visina, sl. 139.
b) Trouglovi AMC i NBC su podudarni, pa je trougao MNC jednakokraki.
c) Iz a) i b) slijedi $90^0 - \sphericalangle PMC = 60^0 + \sphericalangle PNC$, pa je traženi zbir $\sphericalangle PMC + \sphericalangle PNC = 30^0$



Sl. 139



Sl. 140

376. Neka su unutrašnji uglovi konveksnog četverougla $ABCD$ redom α, β, γ i δ i neka su O_1, O_2, O_3 i O_4 redom centri kružnica k_1, k_2, k_3 i k_4, sl. 140. Za ugao φ_1 $\triangle AO_1B$ važi $\boldsymbol{\varphi_1 = 180^0 - \frac{\alpha_1}{2} - \frac{\beta_1}{2}}$, gdje su $\boldsymbol{\alpha_1}$ i $\boldsymbol{\beta_1}$ spoljašnji uglovi $\triangle AO_1B$. Slično, za $\triangle CO_3D$ važi $\boldsymbol{\varphi_3 = 360^0 - \frac{\gamma_1}{2} - \frac{\delta_1}{2}}$, gdje su $\boldsymbol{\gamma_1}$ i $\boldsymbol{\delta_1}$ spoljašnji uglovi $\triangle CO_3D$. Dalje dobijamo: $\boldsymbol{\varphi_1+\varphi_3=360^0-\frac{1}{2}\cdot(\alpha_1+\beta_1+\gamma_1+\delta_1)=360^0-\frac{1}{2}\cdot 180^0=180^0}$. Ka-ko su uglovi $\boldsymbol{\varphi_1}$ i $\boldsymbol{\varphi_3}$ suplementni uglovi, a slično dobijamo da važi i za uglove $\boldsymbol{\varphi_2}$ i $\boldsymbol{\varphi_4}$: $\boldsymbol{\varphi_2+\varphi_4=180^0}$, to je četverougao $O_1O_2O_3O_4$ tetivni, tj. tačke O_1, O_2, O_3 i O_4 pripadaju jednoj kružnici.

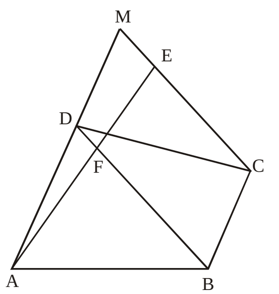
377. Zbir svih mogućih 10 zbirova je 140. Budući da se svaki od 5 nepoznatih brojeva nalazi u 4 zbira, to je zbir traženih brojeva: 140:4 = 35. Zbir dva najveća broja je 26, a zbir dva najmanja broja je 1, pa je srednji broj, treći po veličini jednak 35−26−1=8. U nizu zbirova drugi član je zbir najmanjeg i trećeg, tj. 6=−2+8, dakle najmanji broj je −2. Otuda dobijemo drugi broj 1−(−2)=3. Slično dobijamo četvrti i peti broj te je niz: −2, 3, 8, 11, 15.

378. Ako je matematička sekcija imala ukupno n članova onda je svaki član napisao $n-1$ razglednicu. Dakle, n članova je napisalo $n\cdot(n-1)=702$. Kako je $702=26\cdot 27$ to je broj članova matematičke sekcije 27.

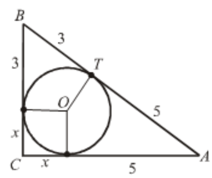
379. Ako je $2003+n=m(n+1)$, tada je $2002=m(n+1)-(n+1)=(m-1)(n+1)$, što znači da je $n+1>1$. Dakle, broj $n+1$ je djelilac broja 2002. Kako je $2002=2\cdot 7\cdot 11\cdot 13$, to važi $n+1=2^a\cdot 7^b\cdot 11^c\cdot 13^d$, gdje a, b, c i d mogu biti 0 ili 1. Odavde dobijamo $2^4=16$ mogućnosti izbora vrijednosti eksponenata a, b, c i d. Dakle, postoji 16 mogućnosti izbora za prirodan broj n koji zadovoljava uslove zadatka.

380. Neka je F presječna tačka visine AE trougla ACM i dijagonale BD četverougla $ABCD$ ($AE\perp CM$ i $AE\perp BD$), sl. 141. Duž EF jednaka je visini $\triangle BCD$ koji odgovara stranici BD i važi:

$$P_{ABCD}=P_{ABD}+P_{BCD}=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot AF+\frac{1}{2}\cdot BD\cdot EF=\frac{1}{2}\cdot BD\cdot(AF+EF)=P_{ACM}.$$



Sl. 141



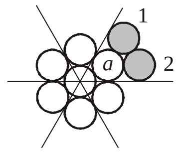
Sl. 142

381. Kako je površina trougla je, $P=(x+3)(x+5):2=(x^2+8x+15):2$, sl. 142, a na osnovu Pitagorine teoreme dobijamo $(x+3)^2+(x+5)^2=64$; $x^2+8x+15=30$.
Iz $P=(x^2+8x+15):2$ i $x^2+8x+15=30$ je $P=15\ cm^2$.

382. Pretpostavimo suprotno, tj. da važi $x^2+y^2+xy+x+y+2=0$. Množenjem ove jednakosti sa 2 dobijamo: $2x^2+2y^2+2xy+2x+2y+4=0$; $(x^2+2x+1)+(y^2+2y+1)+$

$(x^2+2xy+y^2)+2=0$; $(x+1)^2+(y+1)^2+(x+y)^2+2=0$. Posljednja jednakost je nemoguća, jer je $(x+1)^2+(y+1)^2+(x+y)^2+2>0$ za sve realne brojeve x i y. Dakle, pretpostavka je pogrešna i važi $x^2+y^2+xy+x+y+2\neq 0$ za sve realne brojeve x i y.

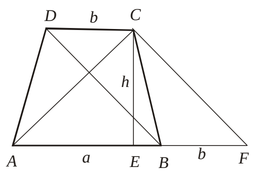
383. Na sl. 143. je jasno da osjenčena kružnica, kotrljajući se po kružnici a iz položaja 1 do položaja 2 preže put $l=\frac{2r\pi}{3}$. Pošto u istom smjeru mora preći još 5 takvih dužina, to je ukupno 2 obrtaja.



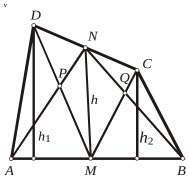
Sl. 143

384. Neka je $2x$ udaljenost između uzletišta aviona i helikoptera. U trenutku susreta avion je preletio $(x+50)$ km, a helikopter $(x-50)$ km. Avion je poslije susreta preletio $(x-50)$ km za 1 čas i 20 minuta te je njegova brzina $(x-50):\frac{3}{4}=\frac{3(x-50)}{4}$. Slično računamo da je brzina helikoptera $\frac{x+50}{4}$. Do susreta avion je letio $(x+50):\frac{3(x-50)}{4}=\frac{4(x+50)}{3(x-50)}$, a helikopter $(x-50):\frac{(x+50)}{3}=\frac{3(x-50)}{(x+50)}$. Kako su polijetali istovremeno to važi $\frac{4(x+50)}{3(x-50)}=\frac{3(x-50)}{(x+50)}$. Poslije sređivanja date jednakosti dobijamo: $4(x+50)^2=9(x-50)^2$; $2(x+50)=3(x-50)$. Rješenje ove jednačine je $x=250$ km. Brzina aviona je 150 km/h, a helikoptera 100 km/h. Udaljenost uzletišta je 500 km.

385. Iz $P=\frac{a+b}{2}\cdot h$, prema uslovu zadatka je $h^2=\frac{a+b}{2}\cdot h$, tj. $a+b=2h$. Neka je na produžetku duži AB izabrana tačka F takva da je $BF=CD=b$, sl. 144. Tada je četverougao $BFCD$ paralelogram, pa je $BD=FC$, a duž AF jednaka zbiru osnovica trapeza: $AF=a+b$. Dijagonale jednakokrakog trapeza su jednake, pa je $\triangle AFC$ jednakokraki i podnožje E visine CE je središte duži AF, stoga je $AE=CE=h$, pa je $\sphericalangle CAE=45^0=\sphericalangle EFC$. Odavde slijedi da je ugao ACF prav. Dakle, dijagonale su međusobno normalne.



Sl. 144



Sl. 145

386. Neka su h, h_1 i h_2 visine trouglova ABN, AMD i MBC, sl. 145. Visina h je srednja linija trapeza osnovica h_1 i h_2 i važi $h_1+h_2=2h$. Neka je $AB=a$. Prema uslovima zadatka je $AM=MB=\frac{1}{2}\cdot a$ pa je: $P_{AMD}+P_{MBC}=\frac{1}{2}\cdot AM\cdot h_1+\frac{1}{2}\cdot MB\cdot h_2=\frac{1}{4}\cdot a\cdot h_1+\frac{1}{4}\cdot a\cdot h_2$; $P_{AMD}+P_{MBC}=\frac{a}{4}\cdot(h_1+h_2)=\frac{a}{4}\cdot 2h=\frac{a\cdot h}{2}$. Ako lijevoj i desnoj strani ove jednakosti oduzmemo njihove zajedničke dijelove površina, površine trouglova AMP i MBQ, dobijamo: $P_{AMD}+P_{MBC}-(P_{AMD}+P_{MBG})=P_{ABN}-(P_{ABN}+P_{MBQ})$; $P_{APD}+P_{BCN}=P_{MNQP}$; što je i trebalo dokazati.

387. Neka je m=100a+10b+c. Permutacijom cifara broja m dobija se šest brojeva čiji je zbir S=2(a+b+c)(100+10+1)=222(a+b+c). Aritmetička sredina tih brojeva je A=37(a+b+c). Iz uslova m=100a+10b+c=37(a+b+c) dobijamo 7a= 3b+4c tj. 7(a–c)=3(b–c). Kako je –9<b–c<9 i 7 dijeli b–c, imamo ove mogućnosti:

a) Ako je b–c=0, tada je a=b=c i traženi broj je oblika $\overline{aaa}$, a=1, 2, 3...,9.

b) Ako je b–c=7, tada je a–c=3, što je moguće za c=0, 1, 2, a tada dobijamo tražene brojeve 370, 481 i 592.

c) Ako je b–c=–7,tada je a–c=–3, a to vrijedi za c=7, 8, 9, te dobijamo tražene brojeve 407, 518 i 629.

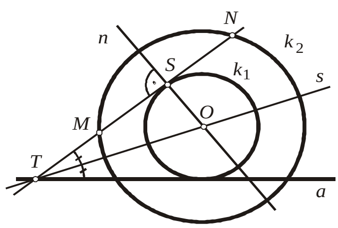
388. Kako je $\overline{XXX} = 100 \cdot X + 10 \cdot X + X$; $\overline{XXX} = 111 \cdot X$, to važi $\overline{XXX} \cdot Y + Z =$ 2004; $111 \cdot X \cdot Y + Z = 111 \cdot 18 + 6$. Iz posljednje jednakosti slijedi $X \cdot Y = 18$, $Z = 6$, odnosno da postoje sljedeći slučajevi:

a) X=9, Y=2, Z=6; b) X=2, Y=9, Z=6; c) X=3, Y=6, Z=6; d) X=6, Y=3, Z=6. Zbog uslova zadatka da jednakim slovima odgovaraju jednake cifre, a različitim slovima različite cifre, direktnim računanjem dešifrujemo jednakost
$\overline{XXX} \cdot Y + Z = 2004$; $222 \cdot 9 + 6$ i 999·2+6=2004.

389. Ako 50 učenika iz druge grupe rasporedimo u treću grupu, onda će, prema uslovima zadatka, u te dvije grupe biti po 150 učenika, tj. u drugoj i trećoj grupi je ukupno 300 učenika. To je, prema uslovima zadatka, polovina svih učenika u školi umanjena za 50 učenika. Dakle, u školi je ukupno 700 učenika.

390. Broj je djeljiv sa 36 ako je djeljiv sa 4 i sa 9. To znači da dvocifreni završetak traženog broja mora biti djeljiv sa 4 i da je zbir cifara tog sedmocifrenog broja djeljiv sa 9. Najmanji sedmocifreni broj djeljiv sa 36 je oblika 1023∗∗∗, gdje su tri posljednje cifre predstavljene znakom ∗. Dakle, prema uslovima zadatka, zbir tri posljednje cifre je 21, jer samo u tom slučaju 1023∗∗∗ je djeljiv sa 9. Odavde zaključujemo da su tri posljednje cifre traženog broja 9, 8, 4; 9, 7, 5; 8, 7, 6. Dalje, direktnim provjeravanjem uslova da je dvocifreni završetak tog broja djeljiv sa 4 dobijamo da je traženi broj 1023768.

391. Kružnice k_1, k_2 imaju zajednički centar O, sl. 146. Kako kružnicu k_1 dodiruju prave a i MN, to se tačka O nalazi na simetrali s ugla koji čine ove dvije pra-ve. Prema uslovima zadatka, kružnica k_2 sadrži tačke M, N i prema tome tačka O pripada simetrali n duži MN. Dakle, tačka O je presjek pravih s, n.



Sl. 146

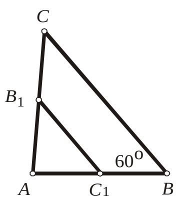
392. Prema zadatku, oštar ugao je jedanaestina tupog ugla, pa je zbir oštrog i tupog ugla dvanaest jedanaestina tupog ugla. Kako zbir oštrog i tupog ugla iznosi 189^0, to je tup ugao 165^0, a oštar 15^0.

393. Važi $\alpha = \frac{2\beta}{5}$ i $\gamma = 4\alpha$, te je $\gamma = \frac{8\beta}{5}$. Iz $\alpha + \beta + \gamma = 180^0$ slijedi $\frac{\gamma}{4} + \frac{5\gamma}{8} + \gamma = 180^0$; $\frac{15\gamma}{8} = 180^0$; $\gamma = 96^0$. Dalje važi $\beta = \frac{5\gamma}{8} = 60^0$ i $\alpha = \frac{\gamma}{4} = 24^0$-

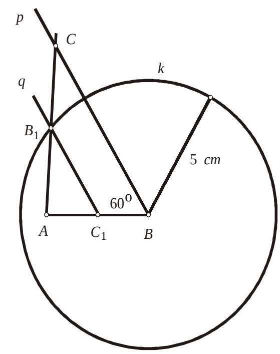
394. Neka je Saša za svaku vrstu bombona platio x KM. Prema zadatku, Saša je kupio $\frac{x}{4}\ kg$ bombona jedne vrste i $\frac{x}{6}\ kg$ bombona druge vrste. Kada se bombone pomiješaju dobije se $\frac{x}{4} + \frac{x}{6} = \frac{5x}{12}\ kg$ bombona. Kako je za njih platio $2x$ KM, to je cijena jednog kilograma mješavine $2x : \frac{x}{24} = 48\ KM$.

395. Pretpostavimo da smo konstruisali traženi $\triangle ABC$, sl. 147. Neka je C_1 središte duži AB. Tada je B_1C_1 srednja linija trougla ABC, te je $B_1C_1 \| BC$. Tačka B_1 je presjek kružnice sa centrom u tački B i poluprečnikom r=5 cm; $k(B,5)$, i prave koja sadrži tačku C_1 i paralelna je sa pravom BC. Konstrukcija, sl. 148:

1. duž AB=4 cm;
2. $\sphericalangle ABp$=60^0;
3. tačka C_1 – središte stranice AB;
4. prava q koja sadrži tačku C_1 paralelno sa pravom p;
5. kružnica $k(B,5)$;
6. tačka B_1 – presjek kružnice k i prave q;
7. tačka C – presjek poluprave AB_1 i prave p;
8. trougao ABC.



Sl. 147

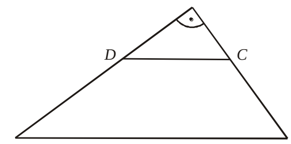


Sl. 148

396. Neka treći radnik završi posao za x dana. Za jedan dan prvi radnik završi $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{10}$, drugi $\frac{1}{15}$, treći $\frac{1}{x}$ posla, a sva trojica zajedno $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ posla. Odavde je x=30. Treći radnik će sam završiti posao za 30 dana.

397. *a*) Od svih prostih brojeva samo jedan je paran, broj 2, a svi ostali su neparni. Prema uslovima zadatka, zaključujemo da je jedan od 2004 sabirka paran broj, tj. broj 2, a ostalih 2003 sabiraka su neparni prosti brojevi. Znači, njihov proizvod je paran broj. *b*) Kako je među 2004 prosta broja samo jedan paran, to su ostala 2003 prosta broja neparna. Kako je zbir 2002 neparna prosta broja paran broj, to je zbir ta 2002 neparna prosta broja i broja 2 paran broj, što je i trebalo dokazati. *c*) Dokazali smo da među 2004 prosta broja postoje 2003 neparna, pa je i njihov zbir neparan broj.

398. Neka je $ABCD$ trapez i neka je tačka M presjek produženih krakova AD i BC, sl. 149. Tada je $\sphericalangle AMB=60^0$. Primjenom Pitagorine teoreme na trouglove ABM, CDM, ACM i BDM dobijamo:

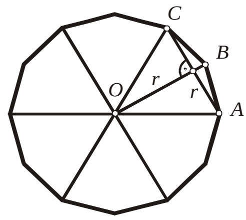


Sl. 149

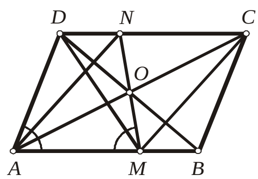
$AB^2+CD^2=(AM^2+BM^2)+(CM^2+DM^2)=(AM^2+CM^2)+(BM^2+DM^2)=AC^2+BD^2$, što je i trebalo dokazati.

399. Površina P pravilnog dvanaestougla jednaka je površini šest podudarnih deltoida čije su dijagonale jednake poluprečniku opisanog kruga, sl. 150. Dakle, površina pravilnog dvanaestougla je $P=6\cdot\frac{r\cdot r}{2}=6\cdot\frac{6\cdot 6}{2}=108\ cm^2$.

400. Datu jednačinu možemo pisati u obliku $(x+1)^2+(y+3)^2=0$. Rješenja ove jednačine su $x=-1$ i $y=-3$. Vrijednost polinoma $P(x,y)=x^{2004}+2003y$, za $x=-1$, i $y=-3$, je $P(-1,-3)=(-1)^{2004}+2003\cdot(-3)=-6008$.



Sl. 150



Sl. 151

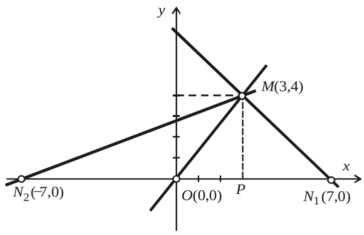
401. Neka prava MO siječe stranicu CD u tački N, sl. 151. Iz uslova zadatka ugao MAD je jednak uglu AMO, pa je trapez $AMND$ jednakokraki. Zato su dijagonale trapeza podudarne: $AN=MD$. Kako su trouglovi AND, CMB podudarni ($AD=BC$; $\sphericalangle ADN=\sphericalangle MBC$; $DN=BM$, kao centralno simetrične duži, u odnosu na tačku O), važi $AN=MC$. Odavde, zbog $AN=MD$, dijagonale jednakokrakog trapeza, slijedi $MC=MD$, što je i trebalo dokazati.

402. Od svih neparnih brojeva, manjih od 100, formirajmo parove čiji je zbir 100. Njih ima 25: (1,99);(3,97);...; (47,53);(49,51). Prema uslovima zadatka dato je

26 različitih neparnih brojeva i bar dva od njih predstavljaju neki od već navedenih parova čiji je zbir 100. Dakle, među 26 različitih neparnih brojeva manjih od 100 postoje bar dva čiji zbir je jednak 100.

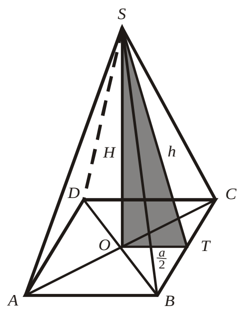
403. Velika kazaljka za 1 čas opiše ugao od 360^0, a za jednu minutu ugao od 6^0. Mala kazaljka za 1 čas opiše ugao od 30^0, a za jednu minutu ugao od $0{,}5^0$. Neka je potrebno x minuta da se kazaljke časovnika prvi put poklope poslije 9 časova. Za to vrijeme mala kazaljka pređe ugao $0{,}5 \cdot x$ stepeni, a velika kazaljka ugao $6 \cdot x$ stepeni. Prema uslovima zadatka je $6 \cdot x - 0{,}5 \cdot x = 270$, tj. $x = 49\frac{1}{11}$. Dakle, kazaljke časovnika će se poklopiti u 9 časova i $49\frac{1}{11}$ minuta.

404. Date tačke predstavimo u Dekartovom pravouglom koordinatnom sistemu xOy, sl.152. Visina MP trougla OMN je 4. Da bi površina $\triangle OMN$ bila 14, to osnovica ON mora biti 7. Dati uslov zadovoljavaju tačke $N_1(7,0)$ i $N_2(-7,0)$ i dobijamo dva trougla čija je površina 14; $\triangle OMN_1$ i $\triangle OMN_2$. Prava OM prolazi kroz koordinatni početak i njena jednačina je oblika $y=kx$. Tačka $M(3,4)$ pripada pravoj OM i njene koordinate zadovoljavaju jednačinu $y=kx$, te važi $4=3k$, , tj. $k = \frac{4}{3}$. Dakle, jednačina prave OM je $y = \frac{4}{3}x$. Jednačina prave MN_1 je oblika $y=kx+n$. Tačke $M(3,4)$, $N_1(7,0)$ pripadaju pravoj MN_1 i koordinate zadovoljavaju jednačinu $y=kx+n$: $4=3k+n$, $0=7k+n$. Rješavanjem ovog sistema jednačina dobijamo: $k=-1$, $n=7$, pa je jednačina prave MN_1: $y=-x+7$. Slično, jednačina prave MN_2 je $y = \frac{2}{5}x + \frac{14}{5}$.



Sl. 152

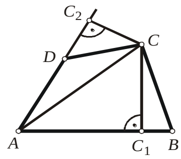
405. Prema uslovima zadatka je $H=17\ cm$, $P_p=204\ cm^2$, sl. 153. Kako je površina dijagonalnog presjeka ACS: $P_P = \frac{1}{2} \cdot d \cdot H$, gdje je d dužina dijagonale osnove, a H visina piramide, to je $d=24\ cm$, pa je $a = \frac{d}{\sqrt{2}} = 12\sqrt{2}\ cm$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na trougao SOT: $ST^2=SO^2+OT^2$; $h^2 = H^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $h^2 = 17^2 + \left(6\sqrt{2}\,\right)^2$; $h = 19\ cm$. Površina piramide: $P = a^2 + 2ah$;
$P = \left(12\sqrt{2}\right)^2 + 2 \cdot 12\sqrt{2} \cdot 19 = 24\left(12 + 19\sqrt{2}\right)\ cm^2$.
Zapremina piramide:
$V = \frac{1}{3} \cdot a^2 \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \left(12\sqrt{2}\right)^2 \cdot 17$;
$V = 1632\ \ cm^3$.



Sl. 153

406. Kako je $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=x^2+2+\frac{1}{x^2}$, to važi: $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$; $x^2+2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}+2$; $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{17}{4}$. Odavde, zbog $x>1$, slijedi $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$. Slično, iz jednakosti $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=x^2-2+\frac{1}{x^2}$ slijedi $\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=\frac{9}{4}$, pa, zbog $x>1$, slijedi $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$. Sabiranjem jednačina $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ i $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ dobijamo $2x=4$, tj. $x=2$.

407. Površina konveksnog četvorougla $ABCD$ jednaka je zbiru površina trouglova ABC i ACD, sl. 154: $P=P_{ABC}+P_{ACD}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CC_1+\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CC_2$, gdje su CC_1, CC_2 redom visine trouglova ABC, ACD. Kako je $BC\geq CC_1$, $CD\geq CC_2$, to važi: $P=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot CC_1+\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CC_2\leq\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC+\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD$, tj. $P\leq\frac{1}{2}\cdot AB\cdot BC+\frac{1}{2}\cdot AD\cdot CD$. Iz posljednje nejednakosti je $2P\leq AB\cdot BC+CD\cdot DA$; $AB\cdot BC+CD\cdot DA\geq 2P$, što je i trebalo dokazati.



Sl. 154

408. Rastavimo 180 na činioce: $180=1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$. Prema uslovima zadatka, proizvod $1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot5$ treba predstaviti kao proizvod četiri činioca: $180=2\cdot2\cdot5\cdot9$; $180=2\cdot3\cdot5\cdot6$; $180=3\cdot3\cdot4\cdot5$; $180=1\cdot4\cdot5\cdot9$; $180=1\cdot5\cdot6\cdot6$. Dakle, četverocifreni bro-jevi čiji je proizvod cifara 180 mogu se napisati redom pomoću cifara: 2, 2, 5, 9; 2, 3, 5, 6; 3, 3, 4, 5; 1, 4, 5, 9; 1, 5, 6, 6. Da bi četverocifreni broj bio djeljiv sa 9, zbir njegovih cifara mora biti djeljiv sa 9. To važi samo ako su cifre četverocifrenog broja 2, 2, 5, 9 ili 1, 5, 6, 6. Najmanji takav četverocifreni broj je 1566.

409. Neka je a stranica kocke. Tada je $P_1=6a^2$; $P_2=6(a+2)^2$; $P_1-P_2=96$, odnosno $6(a+2)^2-6a^2=96$, tj. $a=3\ cm$. Zapremina kocke: $V=27\ cm^3$.

410. Prvim mjerenjem izmjerimo 1 gram šećera, drugim mjerenjem na jednom tasu stavimo izmjereni gram šećera i teg od 1 grama, te na taj način izmjerimo još dva grama šećera. Trećim mjerenjem tegom od 1 gram i tri grama šećera mjerimo još 4 grama i imamo 7 grama šećera. Poslije šestog mjerenja imaćemo 63 grama šećera. Sedmim mjerenjem stavimo 63 grama šećera na jedan tas, a na drugi tas teg i 62 grama šećera. Na taj način imamo 125 grama šećera. Osmim mjerenjem izmjerimo još 125 grama, devetim još 250 grama i desetim još 500 grama što ukupno daje 1 kilogram.

411. Iz $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=90^0$ je $\alpha+\beta=180^0$. Kako je $\alpha=\beta+30^0 10'20''$, to je $\beta=74^0 54'50''$ i $\alpha=105^0 5'20''$.

412. Tačka M se nalazi na simetrali stranice CD, a na udaljenosti 5 cm od tjemena od C i D. Zadatak ima dva rješenja.

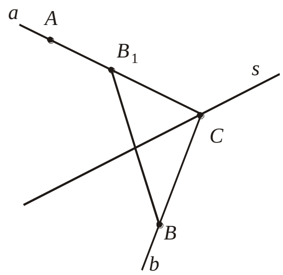
413. Prema uslovima zadatka je $\frac{7}{9}(x-y)=\frac{3}{7}$, pa je $x-y=\frac{27}{49}$. Tada je $\frac{3}{4}(x-y)=\frac{3}{4}\cdot\frac{27}{49}=\frac{81}{196}$.

414. *a*) Transformišimo dati izraz: 1–2+3–4–...+2001–2002+2003–2004=(1–2) +(3–4)+(5–6)+...+(2001–2002)+(2003–2004)=1002·(–1)=–1002.
b) Slično dobijamo 1–3+5–7+9–...+1997–1999+2001–2003 = (1–3)+(5–7)+(7–9) + (9–11)+...+(1997–1999)+(2001–2003)=501·(–2)=–1002.

415. Važi: $\frac{1}{x} > x \Leftrightarrow \frac{1}{x} - x > 0 \Leftrightarrow \frac{1-x^2}{x} > 0 \Leftrightarrow \frac{(1-x)(1+x)}{x} > 0$. Kako je $x \neq 0$, to za $x > 0$, tj. $x \geq 1$ važi $\frac{1}{x} \leq 1$, te za $x > 0$ nema rješenja. Za $x=-1$ je $\frac{1}{x} = x$. Svi ostali cijeli brojevi x, $x<-1$, su rješenja nejednačine, jer je $\frac{1}{x} > -1$; tj. $\frac{1}{x} > x$.

416. Zbir svih članova niza 0, 2, 4, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15 je 72. Budući da se svaki od 5 cijelih brojeva pojavljuje kao sabirak četiri puta, to je njihov zbir 72:4=18. Prema uslovima zadatka, zbir dva najveća broja je 15, a zbir dva najmanja broja je 0, pa je srednji, tj. treći broj po veličini 3. U nizu zbirova drugi je zbir prvog, najmanjeg, i trećeg broja, broja 3, pa je prvi od traženih brojeva −1. Dalje, dobijamo da je drugi broj 1, četvrti 5, a peti 10. Traženi brojevi su: −1, 1, 3, 5, 10…

417. Neka je B_1 tačka simetrična sa tačkom B u odnosu na pravu s, sl. 155 Prava s je simetrala jednog ugla određenog pravima a i b, onda kada se tačka B_1 nalazi na prvoj a. Konstruišemo prvo tačku B_1, a zatim pravu a koja sadrži tačke A i B_1. Neka je C presječna tačka pravih a i s. Na kraju konstruišemo pravu b kroz tačke B i C. Ako je $A=B_1$, odnosno ako su tačke A i B simetrične u odnosu na pravu s, tačka C može biti bilo koja tačka prave s, pa zadatak ima beskonačno mnogo rješenja. U ostalim slučajevima ima jedno rješenje.

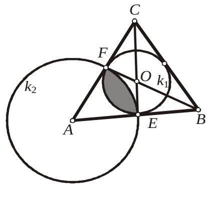


Sl. 155

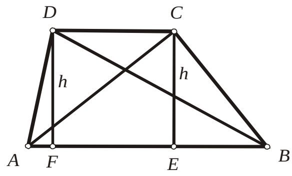
418. *a*) $\sqrt{3+2\sqrt{2}} + \sqrt{3-2\sqrt{2}} = \sqrt{\left(1+\sqrt{2}\right)^2} + \sqrt{\left(1-\sqrt{2}\right)^2} = \left|1+\sqrt{2}\right| + \left|1-\sqrt{2}\right| = 1+\sqrt{2} + \left(-\left(1-\sqrt{2}\right)\right) = 2\sqrt{2}$.
b) $\sqrt{32+10\sqrt{7}} - \sqrt{32-10\sqrt{7}} = \sqrt{\left(5+\sqrt{7}\right)^2} - \sqrt{\left(5-\sqrt{7}\right)^2} = \left|5+\sqrt{7}\right| - \left|5-\sqrt{7}\right| = 5+\sqrt{7} - \left(5-\sqrt{7}\right) = 2\sqrt{7}$.

419. Neka matematičara ima M, filozofa F, a filozofi i matematičara ima Z. Prema uslovu zadatka je Z=10%M i Z=7%F, pa je $M = \frac{7}{10}F < F$. Dakle, više je filozofa.

420. Prema uslovima zadatka i oznaka na sl. 156 površina kružnog isječka AEF je $P_{AEF}=\frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2\cdot\pi\cdot 60}{360}=\frac{a^2\cdot\pi}{24}$; $P_{AEF}=\frac{3\cdot\pi}{2}\ cm^2$ i $P_{OEF}=\frac{\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\cdot\pi\cdot 120}{360}=\frac{a^2\cdot\pi}{36}$; $P_{OEF}=\pi\ cm^2$. Površina četverougla $AEOF$: $P_{AOEF}=\frac{1}{3}\cdot P_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=3\sqrt{3}\ cm^2$, gdje je P_{ABC} površina $\triangle ABC$. Neka je P površina tražene figure: $P=P_{AEF}-P_{AOEF}+P_{OEF}$; $P=\frac{3\cdot\pi}{2}-3\sqrt{3}+\pi$; $P=\left(\frac{5\cdot\pi}{2}-3\sqrt{3}\right)\ cm^2$.



Sl. 156



Sl. 157

421. Neka je $ABCD$ trapez čiji obim i površinu trebamo izračunati; AC njegova dijagonala normalna na duži krak BC, sl. 157. Prema uslovima zadatka, iz pravouglog $\triangle ABC$ primjenom Pitagorine teoreme izračunamo osnovicu trapeza AB: $AB^2=AC^2+BC^2$; $AB^2=60^2+45^2$; $AB=75\ mm$. Visina h trapeza je i visina pravouglog $\triangle ABC$. Kako je površina $\triangle ABC$ $P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AC\cdot BC$, $P_{ABC}=\frac{1}{2}\cdot AB\cdot h$, važi: $AC\cdot BC=AB\cdot h$. Kako je $AC=60\ mm$, $BC=45\ mm$, $AB=75\ mm$ slijedi $h=36\ mm$. Primijenimo li Pitagorinu teoremu na pravougle trouglove AFD i BEC dobijamo: $AF^2=AD^2-DF^2$; $BE^2=BC^2-CE^2$; $AF^2=39^2-36^2$; $BE^2=45^2-36^2$; $AF=15\ mm$, $BE=27\ mm$. Dakle, $CD=FE=AB-(AF+BE)$; $CD=33\ mm$. Obim trapeza: $O=AB+BC+CD+AD=192\ mm$. Površina trapeza $ABCD$:
$P=\frac{AB+CD}{2}\cdot h$; $P=1944\ mm^2$.

422. Neka je dat dvocifreni broj $\overline{ab}$. Prema uslovima zadatka je $\overline{ab}+\overline{ba}=n^2$, tj. $10a+b+10b+a=n^2$, $11(a+b)=n^2$, gdje je su a i b cifre, a n prirodan broj. Iz jednakosti $11(a+b)=n^2$ slijedi da je 11 dijelilac broja n, te je i zbir $a+b$ djeljiv sa 11. Kako je, prema uslovima zadatka, a+b≤18, to je $a+b=11$. Vrijednosti cifara a i b date su u tabeli:

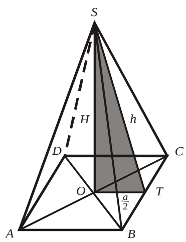
a	2	3	4	5	6	7	8
b	9	8	7	6	5	4	3
$a+b$	11	11	11	11	11	11	11

Dakle, dvocifreni broj $\overline{ab}$ je: 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92.

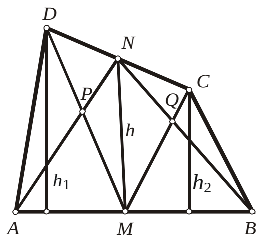
423. Pretpostavimo da smo napunili vodom bure zapremine 2004 litre koristeći pri tome posude od 5 i 7 litara, redom, x i y puta. Dakle, važi $5x+7y=2004$. Kako je $x=\frac{2004-7y}{5}$, to je brojilac $2004-7y$ djeljiv sa 5 ako je 4 cifra jedinica broja $7y$. Jedno rješenje jednačine $5x+7y=2004$ u skupu prirodnih brojeva je $x=1990$, $y=2$. Dakle, bure zapremine 2004 litre može se napuniti posudama od 5 i 7 litara.

424. Prema uslovima zadatka važi iz formule za površinu pravilne četverostrane piramide osnovne ivice a i bočne visine h dobijamo: $P=a^2+2ah$; $5a^2=a^2+2ah$; $h=2a$. sl. 158. Za trougao OST važi $H^2 = h^2 - \left(\frac{a}{2}\right)^2$; $H^2 = (2a)^2 - \frac{a^2}{4}$; $H = \frac{a\cdot\sqrt{15}}{2}$, pa je zapreminu pravilne četverostrane piramide
$V = \frac{1}{3}\cdot\ a^2 \cdot H$, Za $= \frac{a\cdot\sqrt{15}}{2}$ dobijamo $V = \frac{a^3\cdot\sqrt{15}}{6}$.

425. Neka su h, h_1 i h_2 redom visine trouglova ABN, AMD i MBC, sl. 159. Visina h je srednja linija trapeza osnovica h_1 i h_2 i važi $h_1+h_2=2h$. Neka je $AB=a$. Tada je $AM = MB = \frac{1}{2}\cdot\ AB = \frac{1}{2}\cdot\ a$, i važi $P_{AMD} + P_{MBC} = \frac{1}{2}\cdot AM \cdot h_1 + \frac{1}{2}\cdot MB \cdot h_2 = \frac{1}{4}\cdot a \cdot h_1 + \frac{1}{4}\cdot a \cdot h_2$; $P_{AMD} + P_{MBC} = \frac{a}{4}(h_1 + h_2) = \frac{a}{4}\cdot 2h = \frac{a\cdot h}{2} = P_{ABN}$. Dakle, $P_{AMD} + P_{MBC} = P_{ABN}$.Ako lijevoj i desnoj strani ove jednakosti oduzmemo njihove zajedničke dijelove površina, površine trouglova AMP i MBQ, dobijamo $P_{AMD}+P_{MBC} -(P_{AMN}+P_{MBG})=P_{ABN}-(P_{AMN}+P_{MBQ})$; $P_{APD}+P_{BCN}=P_{MQNP}$, što je i trebalo dokazati.



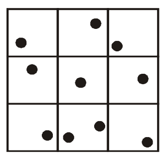
Sl. 158



Sl. 159

426. Transformišimo datu jednačinu: $4x^2+9y^2+16z^2-4x-6y-8z+3=0$; $(4x^2-4x+1)+(9y^2-6y+1)+(16z^2-8z+1)=0$; $(2x-1)^2+(3y-1)^2+(4z-1)^2=0$. Za svaki realni broj a važi $a^2\geq 0$, to je $(2x-1)^2+(3y-1)^2+(4z-1)^2=0$ za $x = \frac{1}{2}$, $y = \frac{1}{3}$, $y = \frac{1}{4}$.

427. Dati kvadrat podijelimo na 9 kvadrata stranice 1 metar, sl.160. Kako ima 10 klikera to se bar u jednom kvadratu nalaze najmanje dva klikera. Ta dva klikera se nalaze na međusobnoj udaljenosti koja je manja od dužine dijagonale kvadrata u kojem se nalaze. Kako je, prema uslovima zadatka, dužina stranice tog kvadrata 1 m to je dužina dijagonala $\sqrt{2}\ m$. Dakle, dokazali smo da postoje bar dva klikera čija je međusobna udaljenost manja od $\sqrt{2}\ m$.



Sl. 160

428. Kako je $90522=2^3\cdot 3\cdot 7^3\cdot 11$, treba pomnožiti sa $2\cdot 3\cdot 7\cdot 11=462$. Dobijeni broj je $(2^3\cdot 3\cdot 7^3\cdot 11)\cdot(2\cdot 3\cdot 7\cdot 11)=2^4\cdot 3^2\cdot 7^4\cdot 11^2=(2^2\cdot 3\cdot 7^2\cdot 11)^2=6468^2$.

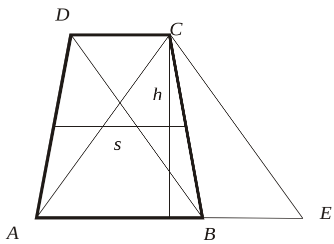
429. Neka je cijena jednog metra štofa prije sniženja iznosila x KM. Tada se za 270 KM moglo kupiti $270 : x$ metara štofa. Poslije sniženja cijena je $0{,}8x$ i za 240 KM se može kupiti $240:0{,}8x$ metara štofa. Kako je $240: 0{,}8x = \frac{240}{0.8x}\cdot\frac{12{,}5}{12{,}5} = 300: x$, to iz uslova zadatka dobijamo $300 : x-270 : x=1$, pa je $x=30$ metara.

430. Neka je E tačka na produžetku osnovice AB, preko tačke B, takva da je BE=CD, sl. 161. Tada je AE=AB+BE=AB+CD=2 s. Četverougao $BECD$ je paralelogram i važi EC=BD=2 s i AC=2 s, pa je $\triangle AEC$ jednakostranični. Zbog toga je visina trapeza $h = \frac{AE \cdot \sqrt{3}}{2} = s \cdot \sqrt{3}$, pa je površina $P = s \cdot h = s^2\sqrt{3}$.

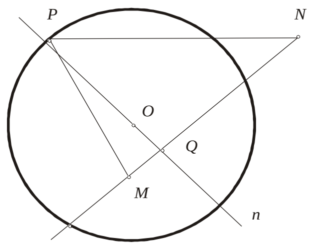
431. Neka je n prava kroz centar O kruga normalna na pravu MN, Q presjek pravih MN i P presjek prave n i kruga, tako da je O na duži PQ, sl. 162. Hipotenuza je veća od katete, pa je MP≥PQ i NP≥PQ, pri čemu je bar jedna stroga nejednakost. Zato je MP+NP>2PQ≥ 2PO=2·3=6 cm.

432. Od 8015 prostih brojeva dva (2 i 5) se ne moraju završavati ciframa 1, 3, 7, ili 9. Preostaje 8013 brojeva, a kako je 8013=4·2003+1, to se bar 2004 broja se završavaju istom cifrom.

433. Neka treći radnik završi posao za x dana. Za jedan dan prvi radnik završi $\frac{1}{10}$, drugi $\frac{1}{15}$, treći $\frac{1}{x}$ posla, a sva trojica zajedno $\frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{x} = \frac{1}{5}$ posla; tj. x=30.

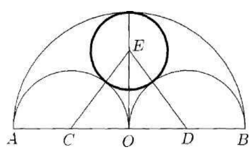


Sl. 161



Sl. 162

434. Neka su C i D centri malih polukrugova poluprečnika $\frac{a}{2}$, a E centar upisanog kruga poluprečnika x, sl. 163. Poluprečnik velikog polukruga je $\frac{a}{2}$, pa kako je $OE = \frac{a}{2} - x$ i $CE = \frac{a}{2} + x$, iz pravouglog $\triangle COE$ dobijamo CE^2=CO^2+OE^2; $\left(\frac{a}{4} + x\right)^2 = \left(\frac{a}{4}\right)^2 + \left(\frac{a}{4} - x\right)^2$; $\frac{3ax}{2} = \frac{a^2}{4}$, pa je $x = \frac{a}{6}$.



Sl. 163

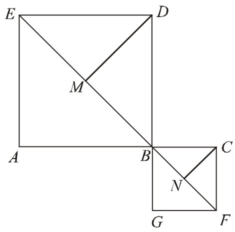
435. Neka je upotrijebljeno x vreća od 27 kg i   vreća od 72 kg. Iz uslova zadatka dobijamo 27x+72y=1224 i 0≤y<x, pa je $x = \frac{136-8y1}{3} = 45 - 3y + \frac{y+1}{3}$. Broj x je cijeli ako je y=3k−1, a tada je x=48−8k. Kako je 0≤y<x, to je 0≤3k−1<48−4k, pa je $\frac{1}{3} \leq k \leq \frac{49}{11}$, tj. k∈{1,2,3,4}. Šećer se može pakovati na 4 načina.

436. Za $AB = \frac{3a}{5}$ i $BC = \frac{2a}{5}$ je $DM = \frac{3a}{5\sqrt{2}}$, $CN = \frac{2a}{5\sqrt{2}}$, $MN = \frac{3a}{5\sqrt{2}} + \frac{2a}{5\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$, sl. 164. Četverougao $MNCD$ je pravougli trapez visine MN, pa je njegova površina $P = \frac{1}{2} \cdot (DM + CN) \cdot MN$, tj. $P = \frac{1}{2} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} \cdot \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{a^2}{4}$.

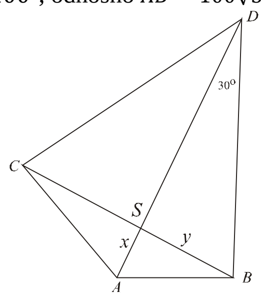
437. Šest uzastopnih prirodnih brojeva koji nisu deljivi sa 7 su $7k+1$, $7k+2$, $7k+3$, $7k+4$, $7k+5$ i $7k+6$. Njihov zbir $42k-21=21\cdot(2k+1)$ djeljiv je sa 21, a kako je $2k+1$ neparan broj, zbir nije djeljiv sa 42. Zbir će biti potpun kvadrat ako je $2k+1=21n^2$. Na lijevoj strani je neparan broj, pa je i n neparan, a zbir je 2^2n^2. Za $n=1$ zbir je trocifren, a za $n \geq 5$ zbir ima više od 4 cifre, pa je $n=3$. Tada je $2k+1=9\cdot 21$; $k=94$. Traženi brojevi su 659, 660, 661, 662, 663 i 664.

438. Elementi skupa A su stepeni brojeva 11, 13, 17 ili 19, pa se završavaju ciframa skupa $\{1,3,7,9\}$. Ako dva broja imaju istu zadnju cifru razlika ta dva elementa je djeljiva sa 10, a u protivnom postoje dva elementa čiji je zbir djeljiv sa 10.

439. Prema sl. 165. označimo $x=AS$ i $y=BS$. Duži CS i DS su visine jednakostraničnih trouglova stranica $2x$ i $2y$, pa je $CS = x\sqrt{3}$ i $DS = y\sqrt{3}$. Iz pravouglih trouglova CDS i ABS računamo $3x^2+3y^2=CS^2+DS^2=CD^2=300^2$, odakle je $3(x^2+y^2)=300^2=9\cdot 100^2$, pa je $AB^2=AS^2+BS^2=x^2+y^2=3\cdot 100^2$, odnosno $AB = 100\sqrt{3}$.

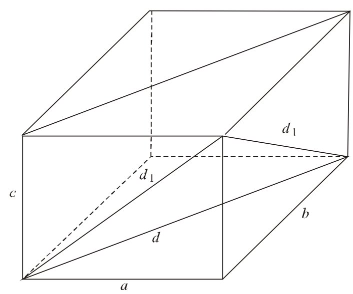


Sl. 164



Sl. 165

440. Iz $a{:}b=4{:}3$ slijedi $a=4t$, $b=3t$, pa je $\frac{{d_1}^2}{{d_2}^2} = \frac{a^2+c^2}{b^2+c^2} = \frac{19t^2+c^2}{9t^2+c^2} = \frac{23}{13}$; $7c^2 = 28t^2$ i $c = 2t$. Površina dijagonalnog presjeka: $P_1 = d \cdot c = \sqrt{a^2+c^2} \cdot c = \sqrt{19t^2+c^2} \cdot c = 10t^2$, sl. 166. Zapremina kvadra je $V = abc = 24t^3$, pa je $P_1 : V = 10t^2 : 24t^3 = 5 : 12t = 2 : 1$. Odavde je $t = \frac{5}{24}$ i važi $V = 24t^3 = \frac{24\cdot 5^3}{24^3} = \frac{125}{576}$. Dakle, $P = 2(ab+ac+bc) = 2(12t^2+8t^2+6t^2) = 52t^2 = 52 \cdot \frac{5^2}{24^2} = \frac{325}{144}$.



Sl. 166

441. Posljednja cifra broja oblika $(10a+1)^{2004}$ je 1. Takvih brojeva u datom zbiru je 201. Poslednje cifre brojeva $(10a+2)^{2004}=((10a+2)^4)^{501}=(10c+6)^{501}$ su 6. Sa 6 se završavaju i brojevi $(10a+4)^{2004}$, $a(10a+3)^{2004}$ sa 1. Takvih brojeva u zbiru ima po 201. Na sličan način se pokazuje da je $(10a+5)^{2004}=10b+5$, $(10a+6)^{2004}=10b+6$, $(10a+7)^{2004}=10b+1$, $(10a+8)^{2004}=10b+6$, $(10a+9)^{2004}=10b+1$ i $(10a+0)^{2004}=10b+0$, pri čemu brojeva navedenih oblika ima po 200. Posljednja cifra datog zbira je posljednja cifra broja $201(1+6+1+6)+200(5+6+1+6+1+0)=6614$. Dati broj se završava cifrom 4.

442. Neka je $2n+1=k^2$ i $3n+1=e^2$, gde su k i e prirodni brojevi. Tada je $5n+3=4(2n+1)-(3n+1)=4k^2-e^2=(2k-e)(2k+e)>0$. Dokažimo da su činioci $2k+e$ i $2k-e$ veći od 1. Očigledno je $2k+e\geq 3$, a $2k-e>0$. Ako je $2k-e=1$, onda je $e=2k-1$, pa je $e^2=3n+1=(2k-1)^2=4k^2-4k+1$. Tada je $1=3(2n+1)-2(3n+1)=3k^2-2(4k^2-4k+1)=-5k^2+8k-2$, pa je $5k^2-8k+3=0$. Takođe važi $5k^2-8k+3=4k^2+k^2-8k+3=k^2+4(k-1)^2-1$. Dakle, $k^2+4(k-1)^2-1=0$, odnosno $k^2+4(k-1)^2=1$. Kako je, prema uslovima zadatka $k^2+4(k-1)^2>1$, to slijedi $2k-e>1$, pa je broj $5n+3$.

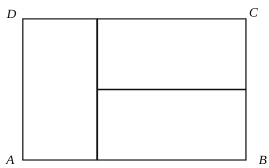
443. Devet datih brojeva, čiji je zbir 171, treba rasporediti u tri reda tako da je u svakom redu zbir jednak, sl. 167. Dakle, zbir u svakom od tri reda je 171:3=57. Izaberemo po tri broja čiji je zbir 57, na primjer: $7+23+27=57$, $3+23+31=57$, $3+19+35=57$. Kako se, na primjer, broj 23 kao sabirak pojavljuje u dva od tri zbira, to znači da sabirke zbira $7+23+27$ pišemo u nekom redu koji označimo sa x, a sabirke zbira $3+23+31$ u koloni koju smo označili sa y. Red x i kolona y imaju zajedničko polje u koje pišemo njihov zajednički sabirak 23. Dalje se razmatranjem na sličan način nastavlja metodom pokušaja. Jedno rješenje je:

7	23	27
15	31	11
35	3	19

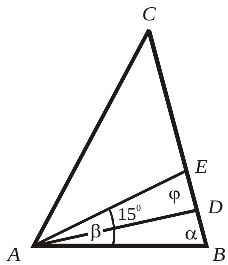
444. 20 minuta je jedna trećina sata. Ako cijeli vinograd okopa za x sati, onda je $\frac{2}{3}x=\frac{16}{3}$ pa je $x=8$ sati. Za okopavanje $\frac{5}{8}$ vinograda treba $\frac{5}{8}\cdot 5=5$ sati.

31	3	23
11	19	27
15	35	7

Sl. 167



Sl. 168



Sl. 169

445. 1) Ako je p prost broj veći od 2, onda je on neparan, pa je i p^{11} neparan broj. Dakle, zbir $p^{11}+2005$ je paran broj. Kako je $p^{11}+2005>2$, to je zbir $p^{11}+2005$

složen broj. 2) Ako je p=2, onda je p^{11}=2048, pa je p^{11}+2005=4053=3?1351. Dakle, p^{11}+2005 je složen broj, što je i trebalo dokazati.

446. Ako je x duža stranica manjih pravougaonika, a kraća y, onda je $x=2y$ pa je $6y=60$ ili $y=10$ cm, a $x=20$ cm, sl. 168. Obim pravougaonika $ABCD$ je $2x+2(x+y)$ $=100$ cm pa je stranica kvadrata 25 cm, a površina 625 cm^2.

447. Neka je x broj grupa. Tada je $6x+2=7x-3$, tj. $x=5$. Dakle, bilo je 5 grupa i 32 učenika.

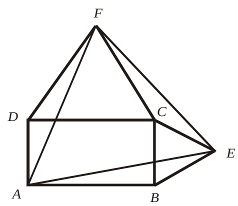
448. Neka suma novca iznosi x KM. Tada važi $\frac{2}{3}x+\frac{3}{8}x+\left(\frac{2}{3}x-85\right)=x$, pa je x=120. Dakle, ukupno je podijeljeno 120 KM.

449. Uočimo $\triangle ADE$, sl. 169. Kako je prema zadatku $\sphericalangle$DAE=15^0, to je φ=15^0. U $\triangle ABE$, prema uslovima zadatka, važi $\frac{\alpha}{2}+\alpha+\varphi=180^0$. Za φ=75^0 dobijamo α=70^0. Dakle, unutrašnji uglovi trougla su 70^0, 70^0, 40^0.

450. Pretpostavimo da svih 2435 mjesnih zajednica imaju različit broj stanovnika i da svaka mjesna zajednica ima bar jednog stanovnika. Tada bi ukupan broj stanovnika svih mjesnih zajednica bio (2435·2436):2=2965830 što je više od 1083764. Dakle, bar dvije mjesne zajednice imaju isti broj stanovnika.

451. Neka je x cijena robe. Poslije povećanja za 25% nova cjena iznosi $1{,}25x$. Dakle, važi $1{,}25x : x = 100 : p$, tj. p=80^0. Novu cijenu treba smanjiti za 20%.

452. Kako je $AD=BC$; $FD=FC$; $\sphericalangle FDA=\sphericalangle FCE=150^0$; važi $\triangle ADF\cong\triangle ECF$, slika 170, pa je $AF=EF$; $\sphericalangle DFA\cong\sphericalangle CFE$. Takođe je $\sphericalangle AFE=\sphericalangle AFC+\sphericalangle CFE=\sphericalangle AFC+\sphericalangle DFA=\sphericalangle DCF=60^0$. Iz jednakosti $AF=EF$, $\sphericalangle AFE=60^0$ slijedi da je $\triangle AFE$ jednakostraničan, što je i trebalo dokazati.

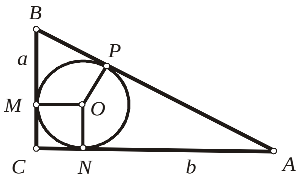


Sl. 170

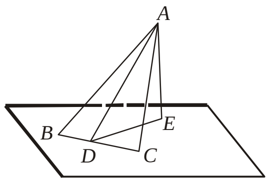
453. Broj dijagonala mnogougla koji ima n stranica je $D_n=\frac{n(n-3)}{2}$ i prema uslovu zadatka je $\frac{n(n-3)}{2}=15n$, odnosno $n(n-3)=0$, tj. $n=33$. Za $n=33$ iz formule za zbir unutrašnjih uglova mnogougla $S_n=180\cdot(n-2)$ dobijamo
$S_{33}=180\cdot(33-2)=5580^0$.

454. Kako je $x^2+y^2+2x-6y+10=(x+1)^2+(y+3)^2=0$, to je jednakost moguća ako je $x=-1$ i $y=3$. Tada je $P(x,y)=(-1)^{2005}+2005\cdot 3=-1+6015=6014$.

455. Neka su a, b katete, a c hipotenuza pravouglog $\triangle ABC$ u koji je upisana kružnica poluprečnika r sa centrom O, sl. 171. Duži OM, ON i OP su poluprečnici upisane kružnice; hipotenuza c je prečnik R opisane kružnice. Prema uslovima zadatka je $\frac{b}{a} = 1{,}05$; $b = \frac{21}{20}a$. Kako je $c = \sqrt{a^2 + b^2}$, to za $b = \frac{21}{20}a$ dobijamo $c = \frac{29}{20}a$. Iz formule $r = \frac{a+b-c}{2}$, za $b = \frac{21}{20}a$ i $c = \frac{29}{20}a$, je $r = \frac{3}{10}a$. Kako je $c = 2R$ i $c = \frac{29}{20}a$, to je $R = \frac{29}{40}a$. Za $R = \frac{29}{40}a$ i $r = \frac{3}{10}a$ iz jednakosti R–r=17 je $\frac{29}{40}a - \frac{3}{10}a = 17$; $a = 40\ cm$. Iz $b = \frac{21}{20}a$, za $a = 40\ cm$, je b=42 cm. Dakle, površina trougla je $P = \frac{ab}{2}$; $P = 840\ cm^2$.



Sl. 171



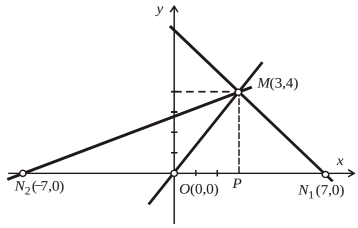
Sl.172

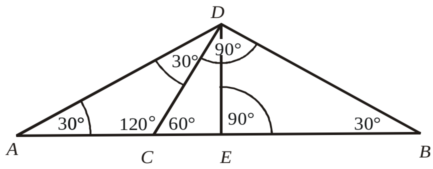
456. Kvadriranjem datih jednačina dobijamo 3(x–2005)=9; y=671, z=2009. Iz prve jednačine je x=2008. Dakle, x+y+z=4688.

457. Kao je $\frac{4}{y} = 2008 - x$ i , prema uslovima zadatka, je prirodan broj, to je i $\frac{4}{y}$ prirodan broj. Dakle, $y \in \{1, 2, 4\}$ i važi: 1) za y=1 je x=1996; 2) za y=2 je x=1998; 3) za y=1 je x=1999. Jednakost $x + \frac{4}{y} = 2008$ je tačna za uređene parove (1996, 1); (1998, 2); (1999, 4).

458. U pravouglom $\triangle ABD$ kateta AD=8 cm, sl. 172. Tačka A je od ravni α udaljena 4 cm, AE=4 cm, odnosno $AE = \frac{AE}{2}$. Dakle, $\triangle ADE$ je pravougli sa oštrim uglovima 30⁰ i 60⁰ pa je ugao diedra $\sphericalangle ADE$=30⁰.

459. Date tačke predstavimo u pravouglom koordinatnom sistemu xOy, sl. 173. Visina MP trougla OMN je 4. Da bi površina trougla OMN bila 14, to osnovica ON mora biti 7. Dati uslov zadovoljavaju tačke $N_1(7{,}0)$ i $N_2(-7{,}0)$ i dobijamo dva trougla čija je površina 14; $\triangle OMN_1$ i $\triangle OMN_2$, slika. Prava OM prolazi kroz koordinatni početak i njena jednačina je oblika $y=kx$. Tačka $M(3{,}4)$ pripada pravoj OM i njene koordinate zadovoljavaju jednačinu $y=kx$, te važi 4=3k, tj. $k = \frac{4}{3}$. Dakle, jednačina prave OM je $y = \frac{4}{3}x$. Jednačina prave MN_1 je oblika $y=kx+n$. Tačke $M(3{,}4)$, $N_1(7{,}0)$ pripadaju pravoj MN_1 i prema tome njihove koordinate zadovoljavaju jednačinu $y=kx+n$: 4=3k+n; 0=7k+n. Rješenja ovog sistema jednačina dobijamo: k=–1, n=7, pa je jednačina prave MN_1: $y=-x+7$. Slično se odredi i jednačina prave MN_2: $y = \frac{2}{5}x + \frac{14}{5}$,





Sl. 173

Sl. 174

460. Transformišimo datu nejednačinu:

$xy(x+y-2z)+yz(y+z-2x)+xz(x+z-2y)\geq 0;$

$x^2y+xy^2-2zxy+y^2z+yz^2-2xyz+x^2z+xz^2-2xyz\geq 0;$

$(x^2z-2zxy+y^2z)+(xy^2-2xyz+yz^2)+(x^2y-2xyz+yz^2)\geq 0;$

$z(x^2-2xy+y^2)+x(y^2-2yz+z^2)+y(x^2-2xz+z^2)\geq 0;$

$z(x-y)^2+x(y-z)^2+y(x-z)^2\geq 0.$

Za svaki realni broj a važi $a^2\geq 0$, to je $(x-z)^2\geq 0$; $(x-y)^2\geq 0$; $(y-z)^2\geq 0$. Kako je, prema uslovima zadatka $x>0$, $z>0$, $y>0$, to je tačna i nejednakost $z(x-y)^2+x(y-z)^2+y(x-z)^2\geq 0$, pa je tačna i njoj ekvivalentna nejednakost $xy(x+y-2z)+yz(y+z-2x)+xz(x+z-2y)\geq 0$.

461. Trougao ACD jednakokraki i važi $AC=CD$, a trougao CED je pravougli sa oštrim uglovima 30^0 i 60^0 i važi $CE=\frac{CD}{2}=\frac{AX}{2}$, sl. 174. Kako je $\triangle AED\cong\triangle BED$, to je $AE=BE=\frac{AB}{2}$. Važi: $AC=AE-CE$; $CE=\frac{AC}{2}$; $BE=\frac{AB}{2}$; $AC=\frac{AB}{2}-\frac{AC}{2}$; $CE=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot AB$; $AC+\frac{AC}{2}=\frac{AB}{2}$; $CE=\frac{AB}{6}$; $\frac{3AC}{2}=\frac{AB}{2}$; $AC=\frac{AB}{3}$. Dakle, $AB:AC:CE:BE=AB:\frac{AB}{3}:\frac{AB}{6}:\frac{AB}{2}$, pa je $AB:AC:CE:BE=1:\frac{1}{3}:\frac{1}{6}:\frac{1}{2}$, odnosno $AB:AC:CE:BE=6:2:1:3$, što je i trebalo dokazati.

462. Transformišimo broj 99^{12345} na sljedeći način: $9^{12345}=(100-1)^{12345}=A\cdot 100-1$, gdje je A prirodan broj. Dakle, 99 je dvocifreni završetak broja 99^{12345}.

463. Neka je $a-b=c$, tada, prema uslovima zadatka, važi $a+b+c=10000$ i $c=3b$. Dalje, iz jednakosti $a-b=c$, zbog $c=3b$, dobijamo $a-b=3b$, tj. $a=4b$. Dakle, $4b+b+3b=10000$, odnosno $b=1250$, pa je $a=5000$ i $c=3b=3750$.

464. Važi: $420=2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot=1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 5\cdot 7$. Odredimo pet brojeva od datih činioca 1, 2, 2, 3, 5, 7 čiji je proizvod 420, a zbir 20: $7\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 1=420$; $7+5+4+3+1+20$. Dakle, traženi brojevi su: 1, 3, 4, 5, 7.

465. *a*) Neka je A=123, pa tražene brojeve dobijamo razmještanjem brojeva A, 4 i 5. Postoji samo 6 takvih mogućnosti: A45, A54, 4A5, 45A,5A4, 54A, tj. $\underline{123}45$, $\underline{123}54$, $4\underline{123}5$, $45\underline{123}$,$5\underline{123}4$, $54\underline{123}$

b) U svakom od rješenja iz slučaja *a*) može se broj A napisati na 6 načina: 123, 132, 213, 231, 312, 321, pa je traženih brojeva ukupno $6\cdot 6=36$.

466. Površina se povećala za površinu kvadrata stranice 5 cm, tj. za 25 cm^2 i za dva podudarna pravougaonika površine $5 \cdot x$, dakle za površinu $(25+2\cdot5\cdot x)$ cm^2. Zato je $25+2\cdot5\cdot x=155$, pa je $h=13$ cm.

467. *a*) Kako je $363=3\cdot11\cdot11$, $231=3\cdot7\cdot11$ i $NZD\,(363{,}231)=3\cdot11=33$ to je stranica traženog kvadrata 33 cm. *b*) Površina ploče je $363\cdot231$ cm^2, odnosno $363\cdot231=(33\cdot11)(33\cdot7)=(33\cdot33)\cdot77$ to zaključujemo da će se dobiti 77 podudarnih kvadrata.

468. Kako je $a+1=a+b+c+d+5$; $b+2=a+b+c+d+5$; $c+3=a+b+c+d+5$; $d+4=a+b+c$ $+d+5$. sabiranjem ovih nejednakosti dobijamo $(a+b+c+d)+10=4(a+b+c+d)+20$, odnosno $a+b+c+d=-\frac{10}{3}$.

469. Traženi broj je oblika $\overline{abcd}$. *a*) Prema uslovima zadatka je $a\in\{1, 2, 3, 4\}$ (4 mogućnosti) i $b\in\{0, 5\}$ (2 mogućnosti). Dalje zaključujemo: Za cifru b ima osam; za cifru c sedam; za cifru d šest kandidata. Dakle, traženih brojeva ima $4\cdot8\cdot7\cdot6\cdot2=2688$. *b*) Prema zadatku $a\in\{1, 2, 3, 4\}$ (4 mogućnosti) i $b\in\{0, 5\}$ (2 mogućnosti). Umjesto b, c ili d možemo napisati bilo koju od 10 cifara. Dakle, dobijamo $4\cdot4\cdot10\cdot10\cdot2=8000$ brojeva.

469. Označimo traženi broj sa x.

Ako broju x dopišemo sdesna cifru 9,	$x\cdot10+9$
dobijeni broj podijelimo sa 13,	$(x\cdot10+9):3$
zatim tom količniku dopišemo sdesna 1	$[(x\cdot10+9):13]\cdot10+1$
i dobijeni broj podijelimo sa 11,	$\{[(x\cdot10+9):13]\cdot10+1\}:11$
dobije se broj 21.	$\{[(x\cdot10+9):13]\cdot10+1\}:11=21$

Rješenje jednačine $\{[(x\cdot10+9):13]\cdot10+1\}:11=21$ je $x=29$.

471.

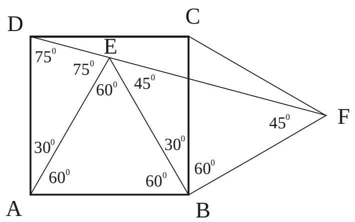
Znak od a, b, c			Vrijednost izraza				
a	b	c	$\frac{a}{\lvert a\rvert}$	$\frac{b}{\lvert b\rvert}$	$\frac{c}{\lvert c\rvert}$	$\frac{abc}{\lvert abc\rvert}$	$\frac{a}{\lvert a\rvert}+\frac{b}{\lvert b\rvert}+\frac{c}{\lvert c\rvert}+\frac{abc}{\lvert abc\rvert}$
+	+	+	1	1	1	1	4
+	+	–	1	1	–1	–1	0
+	–	+	1	–1	1	–1	0
–	+	+	–1	1	1	–1	0
+	–	–	1	–1	–1	1	0
–	+	–	–1	1	–1	1	0
–	–	+	–1	–1	1	1	0
–	–	–	–1	–1	–1	–1	–4

472. Trougao EDA je jednakokraki ($AE=AD$) sa uglovima na osnovici 75^0. Takođe, trougao FEB je jednakokraki ($EB=FB$) sa uglovima na osnovici 45^0, sl. 175. Takođe važi: $\sphericalangle DEF=\sphericalangle DEA+\sphericalangle AEB+\sphericalangle BEF=75^0+60^0+45^0=180^0$, pa je $\sphericalangle DEF$ opružen, tj. tačke su D, E, F kolinearne.

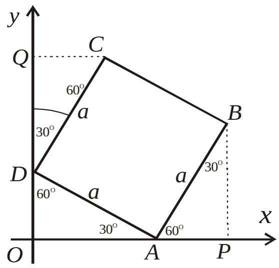
473. Koristeći podatke sa sl. 176, koordinate tjemena kvadrata $ABCD$ su:

trougao ADO: $A\left(\frac{a\sqrt{3}}{2},0\right)$ i $D\left(0,\frac{a}{2}\right)$; trougao APB: $B\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}+\frac{a}{2},\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$; trougao CQD: $C\left(\frac{a}{2},\frac{a}{2}+\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)$.

474. Neka je površina njive x ari. Vrijeme potrebno da se preore prva polovina njive je $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{10}$, vrijeme potrebno da se preore druga polovina njive je $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{5}$. Prema uslovima zadatka važi $\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{5}=\frac{x}{2}\cdot\frac{1}{10}+2$. Rješavanjem ove jednačine dobijamo $x=40$ ari. Seljak je prvu polovinu njive (20 ari) orao 2 časa, a drugu 4 časa i ukupno je radio 6 časova. Oranje je započeo u 6 časova.



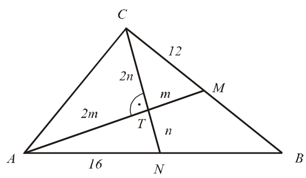
Sl. 175



Sl. 176

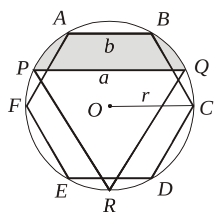
475. Sabiranjem jednakosti: $a^2+2b=7$, $b^2+4c=-7$ i $c^2+6a=-14$ dobijamo: $a^2+2b+b^2+4c+c^2+6a=-14$, tj. $(a+3)^2+(b+1)^2+(c+2)^2=0$. Iz posljednje jednakosti slijedi $a=-3$, $b=-1$, $c=-2$. Dakle, $a^2+b^2+c^2=14$.

476. Težište T dijeli težišnu duž u odnosu 2:1. Neka je $m=MT$, $2m=AT$, $n=NT$ i $2n=CT$, sl. 177. Iz pravouglog $\triangle ANT$, koristeći Pitagorinu teoremu, dobijamo $4m^2+n^2=16^2=256$. Slično, za $\triangle CMT$ važi: $4n^2+m^2=12^2=144$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo: $5m^2+5n^2=400$, pa je $m^2+n^2=80$. Dalje, iz $\triangle ACT$ je $4m^2+4n^2=AC^2$, tj. $AC^2=4(m^2+n^2)=4\cdot 80=320$. Dakle, $AC=\sqrt{320}=8\sqrt{5}\,cm$.



Sl. 177

477. Prema podacima sa sl. 178 važi: $|AB|=b=r=\sqrt{3}\,cm$; $r=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}\,cm$. Površina kruga: $P_k=r^2\pi$; $P_k=3\pi\,cm^2$. Površina $\triangle PQR$: $P_{PQR}=\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$; $P_{PQR}=\frac{9\sqrt{3}}{4}\,cm^2$. Izračunajmo površinu šestougla $ABCDEF$: $P_{ABCDEF}=6\cdot\frac{r^2\sqrt{3}}{4}=\frac{3\sqrt{3}}{2}r^2$; $P_{ABCDEF}=\frac{9\sqrt{3}}{2}cm^2$. Površina kružnog odsječka koji odgovara luku AB:



Sl. 178

$P_{AB} = \frac{P_k - P_{ABCDEF}}{6}$; $P_{AB} = \frac{3\pi - \frac{9\sqrt{3}}{2}}{6} = \frac{6\pi - 9\sqrt{3}}{12}\ cm^2$. Površina figure ograničene tetivama AB i PQ i datom kružnicom: $P = \frac{P_k - P_{PQR}}{3} - P_{AB}$; $P = \frac{\pi}{6}\ cm^2$.

478. $|x| < \sqrt{x^2 - 2x + 1} \Leftrightarrow |x| < \sqrt{(x-1)^2} \Leftrightarrow |x| < |x-1|$.

Kako je $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ i $|x-1| = \begin{cases} -(x-1), & x < 1 \\ x-1, & x \geq 1 \end{cases}$ to važi:

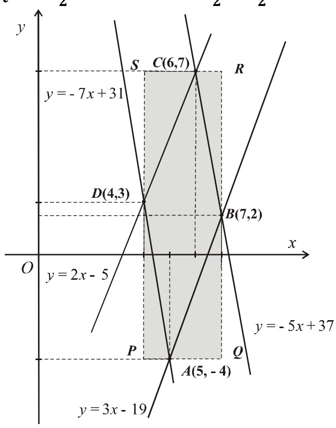
1) $x \in (-\infty, 0)$	2) $x \in [0,1)$	3) $x \in [1, +\infty)$
$-x < -(x-1)$	$x < -(x-1)$	$x < x - 1$
$-x < -x + 1$	$x < \frac{1}{2}$	$0 < -1$, što je nemoguće.
$0 < 1$	$x \in [0, \frac{1}{2})$	
$x \in (-\infty, 0)$		

Rješenje nejednačine: $x \in (-\infty, 0) \cup [0, \frac{1}{2})$, tj. $x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$.

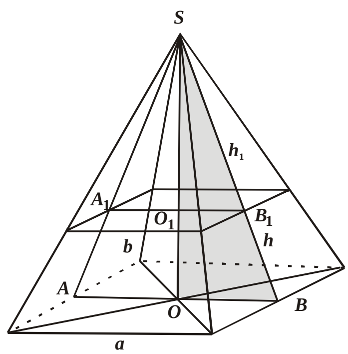
479. Kako je $2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = \frac{9}{x+y} \Leftrightarrow \frac{2(x+y)}{x+y} = \frac{9}{x+y} \Leftrightarrow 2(x+y)^2 = 9xy \Leftrightarrow$ $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 0 \Leftrightarrow (2x - y)(x - 2y) = 0$, to iz posljednje jednakosti slijedi $2x - y = 0$ ili $x - 2y = 0$, te je $\frac{x}{y} = \frac{1}{2}$ i $\frac{x}{y} = 2$.

480. a) Vidi sl. 179. b) $A(5,-4)$, $B(7,2)$, $C(6,7)$, $D(4,3)$.

c) $P_{ABCD} = P_{PQRS} - (P_{\triangle AQB} + P_{\triangle BRC} + P_{\triangle CSD} + P_{\triangle DPA})$. Kako je $P_{PQRS} = 3 \cdot 11 = 33$, $P_{\triangle AQB} =$ $\boldsymbol{P_{AQB} = \frac{2 \cdot 6}{2} = 6}$, $\boldsymbol{P_{BRC} = \frac{1 \cdot 5}{2} = \frac{5}{2}}$, $\boldsymbol{P_{CSD} = \frac{2 \cdot 4}{2} = 4}$, $\boldsymbol{P_{DPA} = \frac{1 \cdot 7}{2} = \frac{7}{2}}$, to je $\boldsymbol{P_{ABCD} = 17}$.



Sl. 179

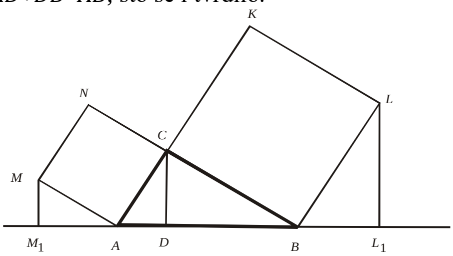


Sl. 180

481. $AB = a$; $OB = \frac{a}{2}$; $A_1B_1 = b$, $O_1B_1 = \frac{b}{2}$; $SO = H$; $SO_1 = x$; $SB = h$; $S_1B_1 = h_1$, sl. 180. Površina omotača piramide: $P_M = 2ah$. Površina omotača manje piramide: $P_m = 2bh_1$. Prema uslovima zadatka je $P_M = 2Pm$, pa je $2ah = 2bh_1$, tj. $\frac{b}{a} = \frac{h_1}{h}$ (1). Kako je $\triangle OBS \sim \triangle O_1B_1S$, to važi $SB : SB_1 = OB : O_1B_1$; $h : h_1 = \frac{a}{2} : \frac{b}{2}$; $\frac{b}{a} : \frac{h_1}{h}$. (2). Iz **(**1) i (2) slijedi: $\frac{h}{2h_1} = \frac{h_1}{h}$; $\left(\frac{h_1}{h}\right)^2 = \frac{1}{2}$; $\frac{h_1}{h} = \frac{1}{\sqrt{2}}$. Iz sličnosti $\triangle OBS \sim \triangle O_1B_1S$, je $SB : SB_1 = SO : SO_1$;

$h{:}h_1{=}H{:}x$; $x = H \cdot \frac{h_1}{h} = \sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 1\ cm$.

482. Neka je D podnožje hipotenuzine visine, sl. 181. Lako se dokazuje podudarnost trouglova ACD i AMM_1. Zaista, $AC{=}AM$ kao stranice kvadrata $CAMN$, a uglovi kod tjemena D i M_1 su pravi. Osim toga $\sphericalangle CAD{=}\sphericalangle AMM_1$, kao oštri uglovi sa normalnim kracima. Iz ove podudarnosti slijedi da je $AD{=}MM_1$. Slično se dokaže da su trouglovi BCD i LBL_1 podudarni, pa je i $DB{=}LL_1$. Dalje zaključujemo da je $MM_1{+}LL_1{=}AD{+}DB{=}AB$, što se i tvrdilo.



Sl. 181

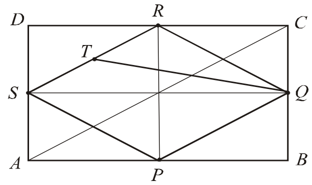
483. Neka je h najmanji od deset uzastopnih prirodnih brojeva napisanih na ploči. Označimo sa $x{+}y$ prirodan broj koji je obrisan. Prema uslovima zadatka je: $x{+}(x{+}1){+}(x{+}2){+}(x{+}3){+}(x{+}4){+}(x{+}5){+}(x{+}6){+}(x{+}7){+}(x{+}8){+}(x{+}9){-}(x{+}y){=}2005$, od-nosno $10\ x{+}45{-}(\ x{+}y){=}2005$, tj. $9x{=}1960{+}y$. Zbir $1960{+}y$ mora biti djeljiv sa 9. Kako je $0{\le}y{\le}0$ to je $y{=}2$. Dakle, $x{=}218$, a 220 je broj koji smo obrisali.

484. Neka je $\overline{abcde}$ petocifreni broj. Kako je $210{=}2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7$, to, prema uslovima zadatka, važi $a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}d{\cdot}e{=}1{\cdot}2{\cdot}3{\cdot}5{\cdot}7$, odnosno $a{\cdot}b{\cdot}c{\cdot}d{\cdot}e{=}1{\cdot}1{\cdot}5{\cdot}6{\cdot}7$. a) Odredimo broj petocifrenih brojeva $\overline{abcde}$ čije su cifre 1, 2, 3, 5, 7. Za cifru a ima 5 kandidata. Dalje, za cifru b ostaju 4 mogućnosti, a za cifru c tri mogućnosti itd. Dakle, traženih brojeva ima $5{\cdot}4{\cdot}3{\cdot}2{\cdot}1$, odnosno 120. b) Odredimo broj petocifrenih brojeva $\overline{abcde}$ čije su cifre 1, 1, 5, 6, 7. Da su sve cifre različite, onda bismo, kao u slučaju a) imali 120 mogućnosti. Međutim, svaki raspored dvije cifre 1, ma kako ih premještali, imaju samo jedno značenje. Dakle, broj različitih petocifrenih brojeva $\overline{abcde}$ čije su cifre 1, 1, 5, 6, 7 ima $120{:}2{=}60$. Petocifrenih brojeva čiji je proizvod cifara 210 je 180 $(120{+}60{=}180)$.

485. Neka je $\frac{a}{b}$ traženi racionalni broj. Treba izabrati što manji broj a i što veći broj b tako da su količnici $\frac{a}{b}{:}\frac{8}{15}$ i $\frac{a}{b}{:}\frac{12}{35}$ cijeli brojevi. Dakle, treba da budu $\frac{a}{b} \cdot \frac{15}{8}$ i $\frac{a}{b} \cdot \frac{35}{12}$cijeli brojevi. Tražimo najmanji a, djeljiv sa 8 i 12: $S(8{,}12){=}24$ i najveći broj b, s kojim mogu da se podijele brojevi 15 i 35: $D(16{,}35)$ =5. Traženi broj je $\frac{24}{5}$.

486. Neka je $AB{=}a$ i $BC{=}b$, sl. 182. Uočimo četverougao $PQRS$. U $\triangle ACD$ duž RS je srednja linija trougla pa je $RS = \frac{1}{2}AC$ i $AC \parallel RS$. U $\triangle ABC$ duž PQ je srednja linija pa je $PQ = \frac{1}{2}AC\ AC$ i $AC \parallel PQ$. Dakle, $PQ{=}RS$ i $PQ \parallel RS$. Slično, dobijemo: $PS{=}QR$ i $PS \parallel QR$. Kako je $AC{=}BD$ to je $PQRS$ romb. Izračunajmo površinu romba:

$P_{QRS}=\frac{GS\cdot RP}{2}=\frac{a\cdot b}{2}$; tj. P_{QRS}=444 cm^2. Kako je $P_{QRS}=\frac{1}{2}\cdot P_{PQRS}$ i $P_{QRT}=\frac{1}{2}\cdot P_{QRS}$, to važi $P_{QRT}=\frac{1}{4}\cdot P_{PQRS}$; $P_{QRT}=111\ cm^2$.



Sl. 182

487. U pravouglom ΔADC duž MD je težišna duž hipotenuze AC, pa je MD=MC i $\sphericalangle MDC$=$\sphericalangle MCD$. Slično je i ND=NC i $\sphericalangle CDN$=$\sphericalangle DCN$. Kako je $\sphericalangle MCD$+$\sphericalangle DCN$= 90^0, to važi $\sphericalangle MDC$+$\sphericalangle CDN$=$\sphericalangle MDN$=90^0.

488. Neka dati niz ima n realnih brojeva. Ako svaki broj h zamijenomo sa $-h$ tada je zbir -40. Dalje, ako svaki broj h datog niza zamijenimo sa $1-h$, tada je, prema uslovima zadatka, $n-40=20$, tj. $n=60$. Prema tome dati niz se sastoji od 60 brojeva. Ako svaki broj h datog niza zamijenimo sa $1+h$, tada je, prema uslovima zadatka, $n+40=60+40=100$. Dakle, zbir brojeva koji se dobiju tako što svaki broj h datog niza zamijenimo sa $1+h$ je 100.

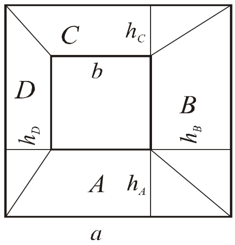
489. Očito je da mora biti $x\neq 0$ i $x+2004\neq 0$. Dijeljenjem date jednačine sa x^{100} dobijamo $\frac{(x+2004)^{100}}{x^{100}}=1$; tj. $\left(\frac{x+2004}{x^{100}}\right)^2=1$, pa je $\frac{x+2004}{x^{100}}=1$ ili $\frac{x+2004}{x^{100}}=-1$. Jednačina $\frac{x+2004}{x^{100}}=1$ nema rješenja te je $\frac{x+2004}{x^{100}}=-1$ pa je $x=-1002$.

490. Neka je dužina stranice većeg kvadrata a, a manjeg b. Figure A, B, C, D su trapezi sa osnovicama a i b. Koristeći podatke sa sl. 183 važi:
$P_A=\frac{a+b}{2}\cdot h_A$; $P_B=\frac{a+b}{2}\cdot h_B$; $P_C=\frac{a+b}{2}\cdot h_C$; $P_D=\frac{a+b}{2}\cdot h_D$. Kako je
$P_A+P_C=\frac{a+b}{2}\cdot(h_A+h_C)$, $P_B+P_D=\frac{a+b}{2}\cdot(h_B+h_D)$ i $h_A+h_C=a-b$, odnosno $h_B+h_D=a-b$, to važi $P_A+P_C=\frac{a^2-b^2}{2}$ i $P_B+P_D=\frac{a^2-b^2}{2}$. Dakle, $P_A+P_C=P_B+P_D$, što je i trebalo dokazati.

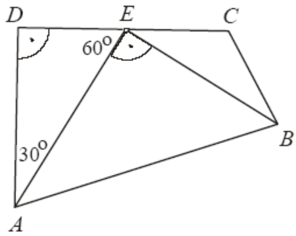
491. Neka je E središte stranice CD, sl. 184. Prema uslovima zadatka $\triangle BCE$ je jednakokraki i važi ∢EBC=∢CEB=30^0. Neka je CF visina $\triangle BCE$. Trougao EFC je pravougli sa oštrim uglovima 30^0 i 60^0 i važi $EF=\frac{\sqrt{3}}{2}\ cm$. Dakle, $EB=\sqrt{3}\ cm$. Trougao ADE je pravougli. Primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle ADE$ dobijamo AE=2 cm. Kako je AE=2 cm, DE=1 cm i $AD=\sqrt{3}\ cm$ to zaključujemo da su u pravouglom $\triangle ADE$ oštri uglovi 30^0 i 60^0 . Dakle, $\triangle AEB$ je pravougli sa pravim uglom AEB. Primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle AEB$ dobijamo $AB=\sqrt{7}\ cm$.

492. Dužine visina koje odgovaraju stranicama a, b, c su 12 cm, 15 cm i 20 cm. Površina datog trougla: $P=\frac{12a}{2}$; $P=\frac{15b}{2}$; $P=\frac{20c}{2}$ i važi $12a$=$15b$=$20c$, tj.
$\frac{a}{5}=\frac{b}{4}=\frac{c}{3}$. Neka je $\frac{a}{5}=\frac{b}{4}=\frac{c}{3}=k$. Tada je a=$5k$, b=$4k$, c=$3k$. Kako je a^2=b^2+c^2

to prema obratnoj Pitagorinoj teoremi zaključujemo da je trougao pravougli sa pravim uglom nasuprot stranice a.



Sl. 183



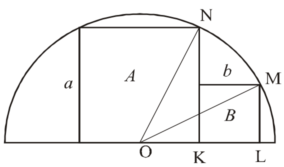
Sl. 184

493. Množeći date jednakosti dobijamo: $(a+b+c)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)=26\cdot 28$;
$\frac{a}{a}+\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}+\frac{c}{c}=728$; tj. $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}+\frac{c}{b}=725$

494. Neka Milan 7. maja 2005. godine ima x godina i y mjeseci. Tada je on star $12x+y$ mjeseci. Prema uslovima zadatka je $12x+y-x=111$, tj. $11x+y=11\cdot 10+1$. Kako je $y<12$, to je $x=10$ i $y=1$. Dakle, Milan je rođen 7. aprila 1995. godine.

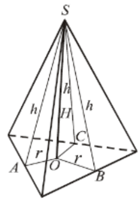
495. $x+y^2=xy \Leftrightarrow x(y-1)=y^2 \Leftrightarrow x=\frac{y^2}{y-1} \Leftrightarrow x=\frac{y^2-1+1}{y-1} \Leftrightarrow x=y+1+\frac{1}{y-1} \Leftrightarrow x=2+(y+1)+\frac{1}{y-1}$. Primijenom nejednakosti na brojeve $(y-1)$ i $\frac{1}{y-1}$ između aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo: $(y+1)+\frac{1}{y-1}\geq 2$. Dakle, važi $x=2+(y+1)+\frac{1}{y-1}\geq 2+2=4$, tj. $x\geq 4$, te je 4 je najmanja vrijednost pozitivnog realnog broja x.

496. Neka su a i b stranice datih kvadrata, sl. 185. Tada je $A=a^2$ i $B=b^2$, odnosno $\frac{A}{B}=\left(\frac{a}{b}\right)^2$. Primijenimo Pitagorinu teoremu, koristeći oznake na slici, na troug-love OKN i OLM: $\left(\frac{a}{b}\right)^2+a^2=ON^2$ i $\left(\frac{a}{2}+b\right)^2+b^2=OM^2$. Kako je $ON=OM$, to važi $\left(\frac{a}{b}\right)^2+a^2=\left(\frac{a}{2}+b\right)^2+b^2$. Dalje slijedi $a^2-ab-2b^2=0$. Posljednju jednakost podijelimo sa b^2: $\left(\frac{a}{b}\right)^2-\frac{a}{b}-2=0$. Neka je $x=\frac{a}{b}$. Tada važi $x^2-x-2=0$; $(x-2)(x+1)=0$, pa je rješenje ove jednačine je $x=2$ ili $x=-1$. Prema uslovima zadatka je $x=2$, tj. $\frac{a}{b}=2$, pa je $\frac{A}{B}=4$.

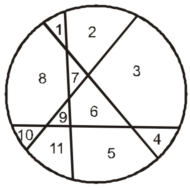


Sl. 185

497. Bočne visine i visina piramide obrazuju podudarne trouglove OAS, OBS, OCS, sl. 186. Znači da je podnožje visine piramide centar upisanog kruga osnove poluprečnika r. Tada je površina osnove $B=rs$, gdje je s poluobim osnove, a površina omotača: $M=sh$. Iz uslova $P=1{,}5\ M$ slijedi da $B+M=1{,}5\cdot M$, tj. $B=0{,}5\cdot M$ ili $M=2\cdot B$. Znači, $sh=2rs$, pa je $h=2r$. Dakle, trouglovi OAS, OBS, OCS su pravougli sa oštrim uglovima 30^0 i 60^0. Zaključujemo da je ugao između hipotenuze h i katete r ugao od 60^0. To je zapravo nagibni ugao bočnih strana.



Sl. 186



Sl. 187

498. Dovoljno je obezbijediti da svaka od 4 tetive siječe ostale tri. Rješenje je 11 dijelova, sl. 187.

499. Vidi rješenje zadatka **392**.

500. Takav prirodan broj n ne postoji, jer je proizvod dva uzastopna prirodna broja paran broj, a izraz 3^n+2 je neparan broj za svaki n.

501. Neka je svako polje šahovske table kvadrat stranice x. Tada su $64x$ i x stranice dobijenog pravougaonika. Iz $2\cdot(64x+x)=390$ dobijemo $130x=390$, pa je $x=3$. Površina šahovske table je $P=64x\cdot x=64\cdot 9=576\ cm^2$.

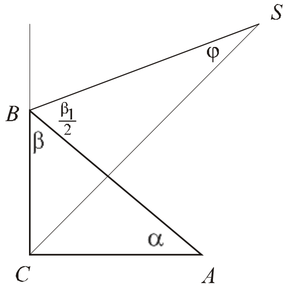
502. Ako bi boce bile po $\frac{4}{5}\ l$,onda bi ukupan kapacitet bio $209\cdot\frac{4}{5}=167\frac{1}{5}$, dakle za $\frac{4}{5}\ l$ više. Pošto su boce od $\frac{3}{4}\ l$ za $\frac{1}{20}$ manje od boca kapaciteta $\frac{4}{5}$ to je $4\frac{1}{5}:\frac{1}{20}=84$. Dakle, ima 84boce od $\frac{3}{4}\ l$.

503. Ako u izrazu $*1*2*4*8*16*32*64$ umjesto $*$ stavimo znak +, dobijamo $+1+2+4+8+16+32=63<64$ i zaključujemo da ispred broja 64 mora stajati znak + (u protivnom bi rezultat bio negativan). Dakle, $*1*2*4*8*16*32+64=27$. Dalje, ispred broja 32 treba stajati znak minus (–), inače bi vrijednost izraza bila veća od 43. Slično zaključujemo i dalje, te najzad dobijamo tačnu jednakost: $1-2+4+8-16-32+64=27$.

504. Prema zadatku važi: $\alpha=\frac{4}{11}\cdot(180^0-\alpha)$, pa je $\alpha=48^0$ i $\beta=42^0$, sl. 188. Tada je $\beta_1=138^0$, i važi $\varphi=180^0-\left(45^0+\beta+\frac{\beta_1}{2}\right)=180^0-(45^0+42^0+69^0)=24^0$.

505. Kako je $15=3\cdot 5$ i $21=3\cdot 7$, to su 1, 3, 5, 7, 15, 21 djelioci traženog broja. Njegovi djelioci su takođe i brojevi $5\cdot 7=35$ i $3\cdot 5\cdot 7=105$. Dakle, broj 105 ima osam djelilaca među kojima su 15 i 21.

506. Neka su a=14 cm, b=4 cm i c stranice trougla. Tada, prema zadatku, važi a+b<c i $|a–b|$>c, pa je 19>c i 11< c. Dalje slijedi c∈{12, 13, 14, 15, 16, 17,18}.

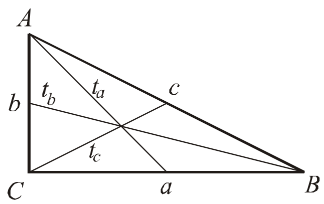


Sl. 188

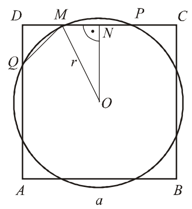
507. Jedna mogućnost je (redosljed prevoza posjetilaca nije bitan): 1. Lift koristi jedan posjetilac težine 80 kg. 2. Lift se vraća prazan u prizemlje. 3. Lift koristi drugi posjetilac težine 80 kg. 4. Lift se vraća prazan u prizemlje. 5. Lift koriste posjetilac težak 60 kg i treći posjetilac koji ima 80 kg. Dakle, lift treba preći rastojanje između prizemlja i posljednjeg sprata najmanje pet puta.

508. a) U datom razlomku imamo deset slova, tj. prema uslovima zadatka deset različitih cifara. Prema tome jedno slovo predstavlja cifru 0 i vrijednost proizvoda u kojem se nalazi cifra 0 jednak je 0. Dalje zaključujemo da se 0 nalazi u brojiocu, jer u suprotnom slučaju vrijednost imenioca bi bila jednaka 0. Kako je dijeljenje nulom nemoguće, to zaključujemo da je vrijednost datog razlomka 0. b) U brojiocu među pet slova, tj. pet cifara samo cifra koju predstavlja slovo C se ne nalazi i u imeniocu. Kako je vrijednost datog razlomka 0, to slovu C odgovara cifri 0.

509. Prema uslovima zadatka, sl. 189 važi: ${t_a}^2 = {t_b}^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$, ${t_b}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$. Odavde slijedi ${t_a}^2 + {t_b}^2 = b^2 + \frac{a^2}{4} + a^2 + \frac{b}{4} = \frac{5}{4} \cdot (a^2 + b^2) = \frac{5c^2}{4}$. Kako je $c = 2t_c$, to je ${t_a}^2 + {t_b}^2 = 5{t_c}^2$, što je i trebalo dokazati.

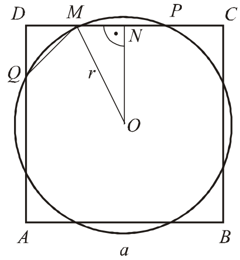


Sl. 189



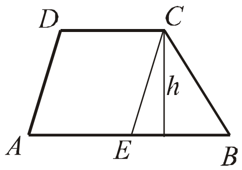
Sl. 190

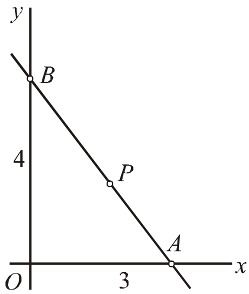
510. Neka je $ABCD$ kvadrat i AB=a, sl. 190. Tada je $MP = \frac{a}{3}$, $MN = NP = \frac{a}{6}$ i $r = 2\sqrt{10}\ cm$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle MNO$: OM^2=ON^2+ NM^2, pa je $(2\sqrt{10})^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$. Odavde slijedi a=12 cm, pa je DM=MP=PC=4 cm. Za pravougli $\triangle MDQ$ važi $MP^2=MD^2+DQ^2$, odnosno $MP^2=32$, pa je $MP = 4\sqrt{2}\ cm$. Mnogougao, određen presječnim tačkama kružnice i kvadrata je osmougao i njegov obim je $O = 4(4 + 4\sqrt{2}) = 16(1 + \sqrt{2})cm$.



Sl. 190

511. Neka je E tačka na duži AB tako da je $EC||AD$, sl. 191. Četverougao $AECD$ je paralelogram pa je $EB=25-15=10\ cm$ i $CE=AD=8\ cm$. Kako za $\triangle EBC$ važi $EB^2=100$ i $EC^2+BC^2=64+36=100$, to iz obrnute Pitagorine teoreme slijedi da je $\triangle EBC$ pravougli sa pravim uglom ECB. Neka je h visina trapeza (i $\triangle EBC$). Tada je $P_{EBC} = \frac{EC\cdot BC}{2} = \frac{8\cdot 6}{2} = 24\ cm^2$. Kako je $P_{EBC} = \frac{EB\cdot h}{2}$, to je $h = \frac{2P_{EBC}}{EB}$ i dobijamo $h=4{,}8\ cm$. Površina trapeza je $P=96\ cm^2$. B





Sl. 191 Sl. 192

512. Kako je: $\frac{1}{1+\frac{1}{5}} = \frac{a}{b}$; $\frac{5}{6} = \frac{a}{b}$, to slijedi $a=5$ i $b=6$, jer su a i b uzajamno prosti brojevi. Dakle, $a^2+b^2=5^2+6^2=91$.

513. Neka je xOy prav ugao i neka prava AB sadrži tačku P tako da je površina $\triangle AOB$ jednaka 6 cm^2, sl. 192. Prema uslovima zadatka je $OA=x$, $OB=y=x+1$, i važi $P_{AOB} = \frac{x\cdot y}{2}$. Odavde slijedi $x\cdot y=12$. Kako je $y-x=1$, to poslije kvadrairanja dobijamo: $y^2-2xy+x^2=1$. Kako je $y^2+x^2=AB^2$ i $x\cdot y=12$, važi $AB^2=25$, pa je $AB=5\ cm$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle AOB$: $OA^2+OB^2=AB^2$. Kako je $OA=x$, $OB=x+1$ i $AB=5$, to je $(x+1)^2+x^2=25$; odnosno $(x+4)(x-3)=0$, pa je $x=3$ ili $x=-4$. Prema uslovima zadatka $x=OA>0$, to je $x=3\ cm$ i $y=x+1=4\ cm$. Stranice trougla su 3 cm, 4 cm i 5 cm.

514. Vidi rješenje zadatka **353**.

515. Transformišimo dati polinom: $4x^2+9y^2-12x+30y+2006=(2x-3)^2+(3y-5)^2-9-25+2006=(2x-3)^2+(3y-5)^2+1972$. Kako je za svaki realan broj a tačna nejedna-kost $a^2 \geq 0$, to je minimalna vrijednost polinoma $(2x-3)^2+(3y-5)^2+1972$ jednaka 1972 za $2x-3=0$ i $3y-5=0$, odnosno za $x=\frac{3}{2}$ i $y=\frac{5}{3}$.

516. Iz date jednakosti dobijamo $ab+ac=\frac{abc}{2006}-ac$, odnosno $ab+ac+ac=\frac{abc}{2006}$. Dijeljenjem poslednje jednakosti sa abc dobijemo $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2006}$.

517. Iz a:b=4:3 slijedi $a=4t$, $b=3t$, pa je $\frac{{d_1}^2}{{d_2}^2}=\frac{a^2+c^2}{b^2+c^2}=\frac{19t^2+c^2}{9t^2+c^2}=\frac{23}{13}$; $7c^2=28t^2$ i $c=2t$. Površina dijagonalnog presjeka: $P_1=d\cdot c=\sqrt{a^2+c^2}\cdot c=\sqrt{19t^2+c^2}\cdot c=10t^2$, sl. 166. Zapremina kvadra je $V=abc=24t^3$, pa je $P_1:V=10t^2:24t^3=5:12t=2:1$; $t=\frac{5}{24}$ i važi $V=24t^3=\frac{24\cdot 5^3}{24^3}=\frac{125}{576}$.

518. Cifra koja se nalazi u srednjem kvadratu je srednja cifra za 4 broje, pa mora biti 2. Prva i treća cifra brojeva iz drugog reda i druge kolone pojavljuje se 2 puta, a ostale 3 puta. Kako se u datom nizu brojeva cifre 4 i 5 nalaze na po jed-nom mjestu, to se u drugom redu ili drugoj koloni nalazi broj 524 ili 425. Na osnovu ovih podataka dobijamo četiri djelimično popunjena kvadrata: Samo u prvom slučaju kvadrat se može popuniti na opisani način, pa je traženi broj 524.

1		2
5	2	4
3		3

1	5	3
	2	
2	4	3

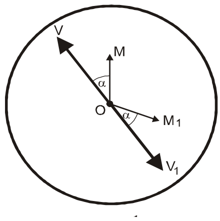
2		1
4	2	5
3		3

2	4	3
	2	
1	5	3

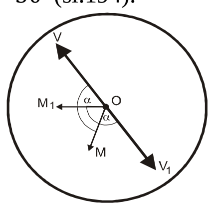
519. Neka su $n-1$, n, $n+1$ tri uzastopna cijela broja. Tada je $(n-1)+n+(n+1)=3n$. Kako je $(a-b+2006)+(b-c+2006)+(c-a+2006)=6018=3\cdot 2006$ to je drugi broj po redu 2006. Dakle traženi brojevi su 2005, 2006, 2007.

520. Kako je $S=(1+2+3+\ldots+2004)+2005=(1+2004)+(2+2003)+(3+2002)+\ldots+(1002+1003)+2005=1002\cdot 2005+2005=1003\cdot 2005$, to je S djeljivo sa 2005.

521. Velika kazaljka za pola sata opiše ugao od 180^0. Kako mala kazaljka za jedan sat opiše dvanaestinu punog ugla, tj. $360^0:12=30^0$, to će za pola sata opisati ugao od 15^0. Na slikama su sa OV i OM redom označeni početni položaji velike i male kazaljke, a sa OV_1 i OM_1 redom su označeni položaji velike i male kazaljke poslije pola sata. Postoje dva slučaja: *a*) kad velika kazaljka „prelazi preko" male kazaljke (sl. 193); *b*) kad velika kazaljka „ne prelazi preko" male kazaljke (sl. 193). Neka je α ugao između velike i male kazaljke. Tada važi: a) $2\alpha+15^0=180^0$; $\alpha=82^0 30'$ (sl. 193). b) $2\alpha-15^0=180^0$; $\alpha=97^0 30'$ (sl.194).



Sl. 193



Sl. 194

522. Kada izdvojimo jednu malu kocku, koja sadrži vrh, površina velike kocke se smanji za tri strane male kocke, a poveća se za preostale tri njene strane, pa ostane nepromijenjena. Slično je i kad izvadimo preostalih sedam malih kocki. Dakle, površine kocke **K** i tijela **T** su jednake.

523. Direktnim računanjem dobijamo
$$\left(1+\frac{2}{5}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{7}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{9}\right)\cdot\ldots\cdot\left(1+\frac{2}{99}\right)\cdot\left(1+\frac{2}{10}\right)=\frac{7}{5}\cdot\frac{9}{7}\cdot\frac{11}{9}\cdot\ldots\cdot\frac{101}{99}\cdot\frac{103}{101}=\frac{103}{5}$$

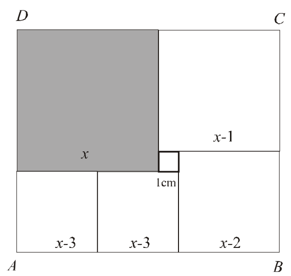
524. Kako je $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}=\frac{13}{60}>\frac{1}{5}$ i $\frac{1}{6}-\frac{1}{7}>0,\cdots,\frac{1}{98}-\frac{1}{99}>0$, to je $\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{98}-\frac{1}{99}+\frac{1}{100}>\frac{1}{5}$.

525. Uočimo da je $116b=19b+97b$. Kako je $19a=97b$ to dalje važi $116b=19b+97b=19\text{b}+19a=19(a+b)$. Brojevi 116 i 19 su uzajamno prosti, pa zaključujemo da ja $a+b$ djeljivo sa 116.

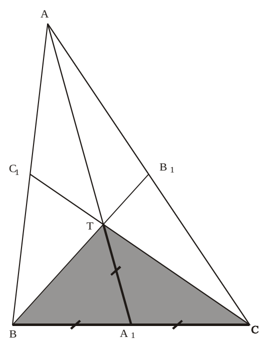
526. Neka je $ABCD$ traženi pravougaonik, sl. 195. Neka je x stranica najvećeg kvadrata Tada je $AB=2(x-3)+(x-2)$, $\text{CD}=x+(x+1)$ i $AB=CD$, te dobijamo jednakost $(x-3)+(x-3)+(x-2)=x+(x+1)$, pa je $x=7$. Stranica šrafiranog kvadrata je $7\ cm$.

527. Neka se težišne duži AA_1, BB_1, CC_1 trougla ABC sijeku u tački T, sl. 196. Prema uslovima zadatka je $AA_1:BC=3:2$; $AA_1=1{,}5BC$. Kako je $TA_1=\frac{AA_1}{3}$ to je, zbog $AA_1:BC=3:2$, $TA_1=\frac{AA_1}{3}=\frac{BC}{2}$. Dakle u $\triangle TBC$ važi $TA_1=\frac{BC}{2}$. Dalje za-ključujemo da je $\triangle TBC$ pravougli sa pravim uglom kod tjemena T. Dakle, ugao između težišnih duži BB_1, CC_1 trougla ABC je prav.

528. Kako je $|x^2-2x-3|=|(x-1)(x-3)|=|x+1|\cdot|x-3|$, to da bi $|x^2-2x-3|=|x+1|\cdot|x-3|$ bio prost broj mora jedan od činilaca biti jednak 1. Dakle, $|x+1|=1$ ili $|x-3|=1$.
1) Za$|x-3|=1$ je $x-3=1$ ili $x-3=-1$, te je $x=4$ ili $x=2$.
2) Za$|x+1|=1$ je $x+1=1$ ili $x+1=-1$, te je $x=0$ ili $x=2$.



Sl. 195



Sl. 196

529. Kako je $(a^2+b^2)^3=a^6+3a^4b^2+3a^4b^2+b^6=a^6+3a^2b^2(a^2+b^2+b^6=a^6+3a^2b^2b^6$, to, zbog $a^2+b^2=1$, slijedi $(a^2+b^2)^3=1^3=1$.

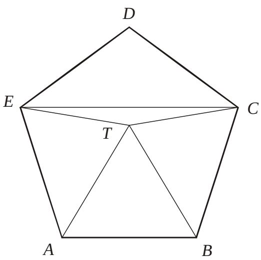
530. Prema zadatku važi $\sphericalangle BAE=108^0$ (unutrašnji ugao pravilnog petougla), te je $\sphericalangle TAE=\sphericalangle BAE-\sphericalangle BAT=108^0-60^0=48^0$, sl. 197. Kako je $TA=TB=AE$, $\triangle TAE$ je jednakokraki pa je $\sphericalangle ETA=\sphericalangle AET=(180^0-\sphericalangle TAE):2=66^0$. Slično, $\sphericalangle CTB=66^0$, pa takođe važi $\sphericalangle CTE=360^0-2\cdot 66^0-60^0=168^0$.

531. Prema uslovima zadatka pravilni desetougao $A_1, A_2, A_3, \ldots, A_{10}$ je upisan u datu kružnicu poluprečnika 1 cm. Uočimo jednakokraki trapez $A_1A_2A_3A_4$, sl. 198. Kako je unutrašnji ugao pravilnog desetougla 144^0, to su uglovi trapeza $A_1A_2A_3A_4$ 144^0 i 36^0. Spojimo tačke A_1, A_2, A_3, A_4 sa centrom kružnice, tačka O. Neka se duži A_1A_4 i OA_3 sijeku u tački K. Kako svaki od datih kružnih lukova ima mjeru 36^0, to važi $\sphericalangle OA_3A_4=\sphericalangle OA_4A_3=72^0$. Zaključujemo da su trouglovi OKA_4 i KA_3A_4 jednakokraki ($A_3A_4=KA_4$) pa je: $A_1A_4-A_1A_2=A_1A_4-A_3A_4=A_1A_4-A_4K=A_1K$. Kako je $\sphericalangle OA_4A_1=\sphericalangle OA_1A_4=36^0$; $\sphericalangle OKA_1=72^0$, to je $\triangle OA_1K$ takođe jednakokraki i važi $A_1K=A_1O=1$ cm. Najzad, kako je $A_1A_4-A_1A_2=A_1K$ i $A_1K=1$ cm, to je $A_1A_4-A_1A_2=1$ cm.

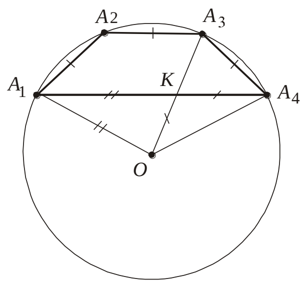
532. $3^{2004}+3^{2005}+3^{2006}=\alpha\cdot 3^{2004}$; $3^{2004}(1+3+3^2)=\alpha\cdot 3^{2004}$; $3^{2004}\cdot 13=\alpha\cdot 3^{2004}$, $\alpha=13$.

533. Svaki cijeli broj n može se prikazati u obliku $4k$ ili $4k+1$ ili $4k+2$ ili $4k+3$ gdje je k cijeli broj. Direkt-nim provjeravanjem ako je $n=4k$, $n=4k+1$, $n=4k+2$, ili $n=4k+3$, dokazujemo tvrđenje: kvadrat cijelog broja pri dijeljenju sa 4 daje ostatak 0 ili 1

n	n^2
$4k$	$16k^2=4\cdot(4k^2)$
$4k+1$	$4\cdot(4k^2+2k)+1$
$4k+2$	$4\cdot(4k^2+4k+1)$
$4k+3$	$4\cdot(4k^2+6k+2)+1$



Sl. 197



Sl. 198

534. Zbog $a+b>0$, važi
$\frac{1+ab}{a+b}<1 \Leftrightarrow 1+ab<a+b \Leftrightarrow (1+ab)-(a+b)<0 \Leftrightarrow (1-a)(1-b)<0.$
Dalje slijedi $((a<1)$ i $(b>1))$ ili $((a>1)$ i $(b<1)=$, što je i trebalo dokazati.

535. Kako je $xyz=1$, to važi $a=x+\frac{1}{x}=x+\frac{xyz}{x}$, odnosno $b=y+zx$ i $c=z+xy$.
Računamo: $a^2=(x+yz)^2=x^2+2xyz+y^2z^2=x^2+2\cdot 1+y^2z^2=x^2+y^2z^2+2$ (1);
$b^2=(y+zx)^2=y^2+2xyz+z^2x^2=y^2+2\cdot 1+y^2z^2=y^2+z^2x^2+2$ (2);
$c^2=(z+xy)^2=z^2+2xyz+x^2z^2=z^2+2\cdot 1+x^2y^2=y^2+x^2z^2+2$ (3);

$abc=(x+yz)\cdot(y+zx)\cdot(z+xy)=xyz+x^2y^2z^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+xy^3z+xyz^3+x^3yz=$
$1+1^2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+xyz(y^2)+xyz(z^2)+xyz(x^2)=2+x^2y^2+y^2z^2+x^2z^2+y^2+z^2x^2$. (4)
Dalje, zbog (1), (2), (3) i (4), dobijamo da je $a^2+b^2+c^2-abc=4$.

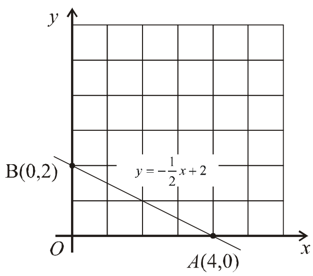
536. Grafik prave $y = \frac{1}{2}x + 2$, određuje u koordinatnom sistemu $\triangle OAB$, sl. 199. Za poluprečnik r kruga upisanog u $\triangle OAB$ važi $r = \frac{P}{s}$, P je površina, a s poluobim. Kako je $P = 4$ i $s = (4+\sqrt{5})\ cm$. Dakle, $r = \frac{4}{4+\sqrt{5}} = (3-\sqrt{5})\ cm$, pa je površina kruga: $P_K = \pi r^2$; $P_K = \pi(14-6\sqrt{5})\ cm^2$.

537. Iz $S=2S-S$, slijedi: $S=2\cdot(2+2^2+2^3+2^4+...+2^{100})-(2+2^2+2^3+2^4+...+2^{100})$;
$S=(2^2+2^3+2^4+2^5+...+2^{101})-(2+2^2+2^3+2^4+...+2^{100})=2^{101}-2=2\cdot(2^{100}-1)$.

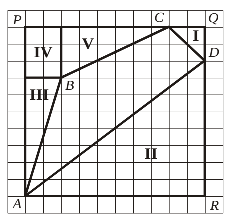
538. Nadopunimo datu figuru $ABCD$ sa figurama čije smo površine označili I, II, III, IV i V, sl. 200. Na taj način dobili smo kvadrat $APQR$. Tada je $P_{ABCD}=P_{APQR}-(P_{\mathrm{I}}+P_{\mathrm{II}}+P_{\mathrm{III}}+P_{\mathrm{IV}})$; $P_{ABCD}=10^2-(2+40+7+6+9)$; $P_{ABCD}=36\ cm^2$.

539. Neka je d broj uzvanika tada je $d+\frac{d}{12}=400$; $d=369\frac{1}{13}$. Dakle, 369 uzvanika i 31 konobar.

540. *a*) Analizirajmo "najnepovoljniju" varijantu: ako uzmemo 15 klikera, onda se može dogoditi da su svi uzeti klikeri crvene boje. Tada je potrebno uzeti još jedan kliker i on je sigurno plave ili zelene boje. Dakle, potrebno je uzeti 16 klikera da bi bili sigurni da su najmanje dva klikera raznih boja. *b*) Na sličan način zaključujemo da ako uzmemo 22 klikera, onda se može dogoditi da smo uzeli svih 15 crvenih i svih 7 zelenih klikera. Ako uzmemo još 2 klikera, tada se među 24 uzeta klikera sigurno nalaze najmanje dva plave boje. Dakle, potrebno je uzeti 24 klikera da bi najmanje dva klikera bila plave boje.



Sl. 199

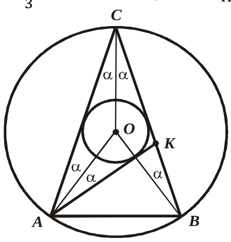


Sl. 200

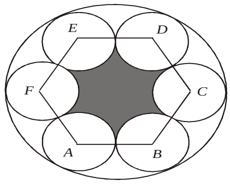
541. Neka su $\overline{ab}$, $\overline{ba}$ traženi prosti brojevi, gdje je $a\neq0$, $b\neq0$, tada je prema uslovima zadatka $\overline{ab}-\overline{ba}=(10a+b)-(10b+a)=9(a-b)$ kvadrat prirodnog broja. Da bi $9(a-b)$ bio kvadrat prirodnog broja, mora biti $a-b=1$ ili $a-b=4$. Kako su $\overline{ab}$ i $\overline{ba}$ prosti brojevi, to su obe cifre a i b neparne. Dakle, $a-b=4$. Direktnim provjeravanjem dobijamo da je $\overline{ab}=73$. Dakle, traženi prosti brojevi su 73 i 37.

542. Prema zadatku centar O kružnice opisane oko trougla ABC nalazi se unutar tog trougla, sl. 201, i važi $OA=OB=OC$ i simetrala ugla C prolazi kroz tačku O, to je $\sphericalangle OAC=\sphericalangle OCA=\sphericalangle OBC=\alpha$ i $\sphericalangle OAB=\sphericalangle OBA$. Dakle, $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA$. Dalje zaključujemo da je $\triangle ABC$ jednakokraki. Kako je AK simetrala ugla CAB, a AO simetrala ugla CAK, to je $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=4\alpha$ i $\sphericalangle ACB=2\alpha$, te važi $4\alpha+4\alpha+2\alpha=180^0$, tj. $\alpha=18^0$. Odgovor: $\sphericalangle A=\sphericalangle B=72^0$ i $\sphericalangle C=36^0$.

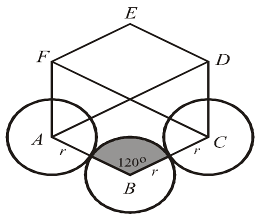
543. Spajanjem centara manjih krugova dobijemo pravilni šestougao $ABCDEF$ čija je dužina stranice 2 cm, sl. 202 a. Traženu površina P dobićemo ako od površine šestougla P_{ABCDEF} oduzmemo šest površina P_i podudarnih kružnih isječaka čiji je centralni ugao 120^0, a poluprečnik $r=1$ cm, sl. 202 b. Kako je $P_{ABCDEF}=\frac{6\cdot AB^2\cdot\sqrt{3}}{4}$, to za $AB=2$ cm, $P_{ABCDEF}=6\cdot\sqrt{3}\ cm^2$ i $P_i=\frac{r^2\cdot\pi}{360}\cdot\alpha$. Za $r=1$ cm i $\alpha=120^O$ je $P_i=\frac{\pi}{3}\ cm^2$. Dakle, $P=P_{ABCDEF}-6P_i$; $P=6\sqrt{3}-2\pi=2(3\sqrt{3}-\pi)\ cm^2$.



Sl. 201



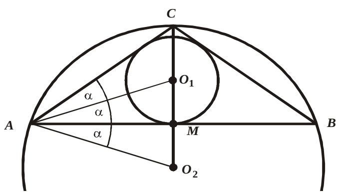
Sl. 202 a



Sl. 202 b

544. Neka je $x=2001$. Tada je $(x-3)(x-1)(x+1)(x+3)+16=(x^2-9)(x^2-1)+16=x^4-10x^2+25=(x^2-5)^2$. Dakle, $1998\cdot2000\cdot2002\cdot2004+16=2001^2-5$.

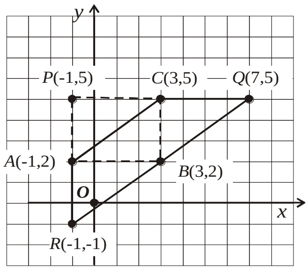
545. Neka je O_1 centar upisane, a O_2 centar opisane kružnice $\triangle ABC$, sl. 203. Prema uslovima zadatka je $O_1O_2\perp AB$ i $O_1M=MO_2$. Takođe, prema zadatku $\triangle ABC$ je jednakokraki ($AC=BC$). Koristeći uslove zadatka i oznake na slici, važi $\sphericalangle O_2AC=\sphericalangle O_2CA=3\alpha$; $\sphericalangle AO_2C=180^0-6\alpha$. Kako je $\sphericalangle AO_2C$ centralni, a $\sphericalangle ABC$ njemu odgovarajući periferijski ugao, to je $\sphericalangle AO_2C=2\sphericalangle ABC$, tj. $180^0-6\alpha=2\cdot2\alpha$, pa je $\alpha=18^0$. Uglovi trougla su: $\sphericalangle A=36^0$, $\sphericalangle B=36^0$, $\sphericalangle C=108^0$.



Sl. 203

546. Sređivanjem datog izraza dobijemo: $a(a+2)+c(c-2)-2ac+1=(a^2-2ac+c^2)+(2a-2c)+1=(a-c)^2+2(a-c)+1=((a-c)+1)^2=(99+1)^2=10000$.

547. U datom koordinatnom sistemu konstruišemo tačke P, Q i R prema uslovima zadatka, sl. 204. Koordinate ovih tačaka su P$(-1,5)$, Q$(7,5)$ i R$(-1,-1)$. Traženi paralelogrami su: $ABCP$, $BCAR$ i $ABQC$. Na osnovu podataka na slici računamo površine paralelograma: $P_{ABCP}=4\cdot3=12$; $P_{BCAR}=3\cdot4=12$; $P_{ABQC}=4\cdot3=12$.



Sl. 204

548. Iz $x^2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}$ slijedi $x^2+2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}+2$; $\left(x+\frac{1}{x}\right)^2=\frac{25}{4}$; $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$. Zbog $x>1$ ne može biti $x+\frac{1}{x}=-\frac{5}{2}$. Slično, iz $x^2-2+\frac{1}{x^2}=\frac{17}{4}-2$; slijedi $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$. Sabiranjem i sređivanjem jednačina $x-\frac{1}{x}=\frac{3}{2}$ i $x+\frac{1}{x}=\frac{5}{2}$ dobijamo $x=2$.

549. Dati izraz rastavimo na činioce: $n^5+n+1=(n^5-n^2)+(n^2+n+1)=n^2(n^3-1)+(n^2+n+1)=n^2(n-1)(n^2+n+1)+(n^2+n+1)=(n^2+n+1)(n^3-n^2+1)$. Da bi izraz n^5+n+1 za neki prirodan broj n bio prost broj mora jedan od njegovih činilaca biti jednak 1, a drugi prost broj. Kako je $n^2+n+1\geq3$ za svaki prirodan broj n to je $n^3-n^2+1=1$, tj. $n^3-n^2=0$; $n^2(n-1)=0$. Jednačina $n^2(n-1)=0$ u skupu prirodnih brojeva ima jedinstveno rješenje $n=1$. Dakle, za $n=1$ broj n^5+n+1 je prost: 3.

550. Ako je Milan na početku odigrao n partija šaha, onda ih je dobio $0{,}6n$ i poslije još deset odigranih partija važi $\frac{0{,}6n+10}{n+10}=0{,}7$, pa je $n=30$. Dakle, Milan je odigrao 40 partija šaha od kojih je dobio 28. Dalje, neka treba odigrati još x partija i od njih y dobiti. Tada je, prema uslovima zadatka, $\frac{28+y}{40+x}=0{,}6$, tj, $y=\frac{3}{5}x-4$. Kako su x i y prirodni brojevi, to znači da x mora biti djeljiv sa 5. Direktnim provjeravanjem dobijamo da je $x=10$ i $y=2$.

551. Prema uslovima zadatka traženi prirodan broje je trocifren. Neka je to broj $\overline{abc}$. Tada, prema uslovima zadatka, važi $328-\overline{abc}=a+b+c$, odnosno $328-(100a+10b+c)=a+b+c$; $101a+11b+2c=328$. Zbog $11b+2c\leq117$, slijedi da je $a=3$, pa iz jednakosti $101a+11b+2c=328$ za $a=3$ dobijamo $11b+2c=25$. Jednakost $11b+2c=25$ je tačna samo za $b=1$ i $c=7$. Dakle, traženi broj je 317.

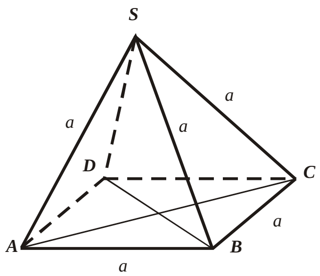
552. Neka je a dužina stranice kvadrata $ABCD$. Kako su bočne strane jednakostranični trouglovi, to sve ivice piramide imaju dužinu a. Uočimo $\triangle SAC$, sl. 205. Kako je $SA=SC=a$ i AC dijagonala kvadrata $ABCD$, to je $AC=a\sqrt{2}$. U očimo da u jednakokrakom $\triangle SAC$ važi $AS^2+SC^2=AC^2$, tj. $a^2+a^2=\left(a\sqrt{2}\right)^2$. Dakle, $\triangle$ACS je jednakokraki pravougli sa pravim uglom kod tjemena S, pa je $\sphericalangle SAC=45^0$.

553. a) Kako je 13123=123·1000+123=123·1001 i 234234=234·1000+234= 234·1001, važi $\frac{123\,123}{234\,234}=\frac{123\cdot 1001}{234\cdot 1001}=\frac{123}{234}=\frac{41}{784}$.
b) Slično, kako je 121121121:121=1001001 i 234234234:234=10011001, to važi $\frac{121\,121\,121}{132\,132\,132}=\frac{121\cdot 1001001}{132\cdot 1001001}=\frac{121}{132}=\frac{11}{12}$.

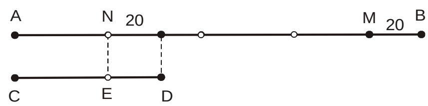
554. Najveća kocka koja se može dobiti od 999 datih kockica ima ivicu 9 cm. Za njeno slaganje potrebno je 729 kocki (729=9·9·9). Od preostalih 270 malih kocki (999–729=270) načinićemo najveću moguću kocku ivice 6 cm i utrošiti 216 malih kocki (216=6·6·6). Ostaje još 54 malih kocki od kojih načinimo dvije kocke ivica 3 cm; 2·(3·3·3)=2·27=54. Na taj način smo iskoristili sve kocke.
a) Dobijamo ukupno 4 kocke i to jednu kocku ivice 9 cm, jednu kocku ivice 6 cm i 2 kocke ivice 3 cm.
b) Zbir površina tako dobijenih kocki je: $P=6\cdot 9^2+6\cdot 6^2+2\cdot 6\cdot 3^2=810\ cm^2$.

555. Zadatak riješimo metodom duži. Neka je AB duža duž, a CD kraća duž. Sa sl. 206. lako se uočava da se duž MN sastoji iz tri jednaka dijela. Dužina duži MN je 90 cm, pa jedan dio te duži iznosi 30 cm i jednak je dužini CE. Manja duž CD iznosi 50 cm, a duž AB iznosi 140 cm.

556. Kako je 1000=7·142+6=994+6, to će 994. dan biti subota, a hiljaditi dan će biti petak.



Sl. 205



Sl. 206

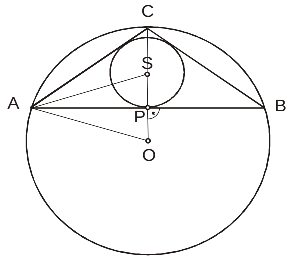
557. Neka su redom V_K i V_L zapremina kocke i lopte. Prema uslovima zadatka je $V_K+V_L=12\frac{4}{15}\ cm^3$; $3V_K+2V_L=35\frac{1}{4}\ cm^3$, pa važi $(3V_K+2V_L)-2(V_K+V_L)=V_K$, odnosno $V_K=35\frac{1}{4}-2\cdot 12\frac{4}{15}=10\frac{43}{60}\ cm^3$.

558. Kako je $\frac{4}{101\cdot 105}=\frac{1}{101}-\frac{1}{105}$; $\frac{4}{105\cdot 109}=\frac{1}{105}-\frac{1}{109}$; $\frac{4}{109\cdot 113}=\frac{1}{109}-\frac{1}{113}$; $\frac{4}{113\cdot 117}=\frac{1}{113}-\frac{1}{117}$, to važi $\frac{4}{101\cdot 105}+\frac{4}{105\cdot 109}+\frac{4}{109\cdot 113}+\frac{4}{113\cdot 117}=\frac{1}{113}-\frac{1}{117}=\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{105}\right)+\left(\frac{1}{105}-\frac{1}{109}\right)+\left(\frac{1}{109}-\frac{1}{113}\right)+\left(\frac{1}{113}-\frac{1}{117}\right)=\left(\frac{1}{101}-\frac{1}{117}\right)=\frac{16}{11817}$

559. Neka je $\boldsymbol{n}$ najmanji od jedanaest datih brojeva. Tada je $\mathbf{5555}=\boldsymbol{n}+(\boldsymbol{n}+\mathbf{1})+(\boldsymbol{n}+\mathbf{2})+\cdots+(\boldsymbol{n}+\mathbf{10})=\mathbf{11}\boldsymbol{n}+(\mathbf{1}+\mathbf{2}+\mathbf{3}+\cdots+\mathbf{10})=\mathbf{11}\boldsymbol{n}+\mathbf{55}$. Dakle, 5555=11$n$+55, odnosno n=500.

560. Neka je vodostaj Vrbasa h cm. Kada se poveća za 25% njegov vodostaj je $1{,}25\cdot h$. Četvrtog dana vodostaj je $1{,}25\cdot h\cdot 0{,}9\cdot 1{,}1\cdot 0{,}8=0{,}99\cdot h$; prema uslovima zadatka. Dakle, četvrtog dana vodostaj Vrbasa je bio za 1% niži.

561. Neka je tačka S centar upisane, tačka O centar opisane kružnice ΔABC i neka je R tačka u kojoj prava OS siječe stranicu AB, sl. 207. Prava OS je simetrala ugla γ, ali i simetrala stranice AV. Zato je $\triangle ABC$ jednakokraki, $AS=VS$. Dalje, pravci AR i AS dijele $\sphericalangle SAO$ na tri jednaka ugla, jer je prava AS simetrala ugla α, a AR je simetrala $\sphericalangle SAO$. Takođe, $\triangle AOS$ je jednakokraki te je $\sphericalangle \mathbf{CAO} = \frac{\gamma}{2}$. Dakle, $\alpha = \boldsymbol{\beta} = \frac{2}{3}\cdot\frac{\gamma}{2} = \frac{\gamma}{3}$. Iz $\alpha + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} = \frac{2\gamma}{3}$ i $\alpha + \boldsymbol{\beta} + \boldsymbol{\gamma} = \mathbf{180^0}$ slijedi $\gamma=108^0$ i $\alpha=\beta=36^0$.



Sl. 207

562. $\boldsymbol{x} = -\frac{\mathbf{15}}{\mathbf{5}}$.

563. Kvadrirajmo jednakost $a + \sqrt{b} = \sqrt{15 + \sqrt{216}}$: $a^2 + b + 2a\sqrt{b} = 15 + \sqrt{216}$. Odavde je $a^2+b=15$ i $2a\sqrt{b} = \sqrt{216}$. Iz $2a\sqrt{b} = \sqrt{216}$ slijedi $4a^2b=216$, tj. $a^2b=54$, pa je $a=9$ i $b=6$ (a i b su cijeli brojevi). Dakle, $a=3$, pa je $\frac{a}{b} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

564. Transformišimo broj $17^{12}=(17^2\cdot 17^2)^3$. Posljednja cifa broja 17^{12} je 9, pa je 1 posljednja cifra proizvoda $17^2\cdot 17^2$. Dakle, broj 17^{12} se završava cifrom 1 pa se broj $17^{12}-1$ završava nulom; djeljiv je sa 10.

565. Kako je $a^2-4a+2007=(a-2)^2+2003$, to je najmanja vrijednost izraza $a^2-4a+2007$ za $a-2=0$, tj. $a=2$. Ona je 2003, za $a=2$.

566. $1000002000001=10^{12}+2\cdot 10^6+1=(10^6+1)^2=[(10^2)^3+1]^2=$
$(10^2+1)\cdot[(10^2)^2-10^2+1]^2=101^2\cdot 9901^2$.

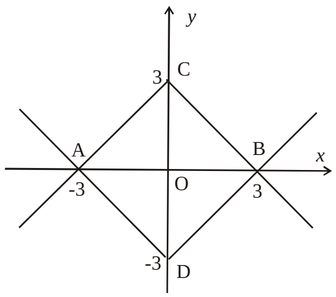
567. Iz jednakosti $x^2+x-1=0$ slijedi $x^2+x=1$. Množenjem ove jednakosti sa x, odnosno sa x^2 dobijamo redom $x^3+x^2=x$ i $x^4+x^3=x^2$. Koristeći ove dvije posljednje jednakosti dobijamo: $x^4+2x^3+x^2=x^4+x^3+x^3+x^2=(x^4+x^3)+(x^3+x^2)=x^2+x=1$.

568. Iz jednakosti $\frac{a+b+2}{4} = \frac{1}{a+1} + \frac{1}{b+1}$ dobijamo $\frac{a+b+2}{4} = \frac{b+1+a+1}{(a+1)(b+1)}$, pa slijedi jednakost imenioca: $4 = (a + 1)(b + 1)$; $ab + a + b + 1 = 4$. Prema uslovima zadatka je $ab=1$ te važi $a+b=2$. Kvadriranjem ove jednakosti dobijamo $a^2+2ab+b^2=4$, odnosno, zbog $ab=1$, $a^2+b^2=2$.

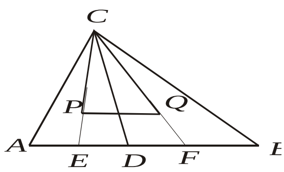
569. Iz jednakosti $\boldsymbol{n(x-n)=2x+5}$ slijedi $\boldsymbol{x=\frac{n^2+5}{n-2}=\frac{(n^2-4)+9}{n-2}=n+2+\frac{9}{n-2}}$. Prema uslovima zadatka n–2 je prirodan broj, djelilac broja 9. Dakle, $n\in\{3,5,11\}$ i važi: x=14 za n=3; x=10 za n=5; x=14 za n=11.

570. a) sl. 208. b) $P_{ADBC}=2\cdot P_{ABC}=2\cdot\frac{1}{2}\cdot AB\cdot OC=2\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=18.$

571. Neka su n, n+1, n+2, n+3, n+4, n+5 šest uzastopnih prirodnih brojeva. Prema zadatku je $\frac{6n+15}{6}=18{,}5$; n=16. Dakle, aritmetička sredina prvih pet brojeva je $\frac{16+17+18+19+20}{5}=18.$



Sl. 208



Sl. 209

572. Tačka P dijeli težišnu duž CE trougla ADC u razmjeri 2:1; $CP=\frac{2}{3}\cdot CE$. Slično, $CP=\frac{2}{3}\cdot CF$, sl. 209. Tada je $P_{CPQ}=\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot P_{ABC}=\frac{2}{9}P_{ABC}=\frac{2}{9}\cdot\frac{1}{2}\cdot 4\cdot 7=\frac{28}{9}\ cm^2$.

573. Prema uslovima zadatka je $\alpha+\beta+\gamma=180^{\circ}$; $\beta+\gamma=90^{\circ}$; $\alpha+\gamma=124^{\circ}$. Dalje slijedi $\alpha+\beta+\beta+\gamma=270^{\circ}$; $\beta+\beta+124^{\circ}=270^{\circ}$; $\beta=73^{\circ}$, pa je $\alpha=107^{\circ}$ i $\gamma=17^{\circ}$.

574. Da su, prema uslovima zadatka, skupili još 17+23+19=59 boca imali bi ih ukupno 289+59=348 i svako odjeljenje bi imalo 348:3=116 boca. Prvo odjeljenje je skupilo: 116–17=99, drugo: 116–23=93, a treće: 116–19=97 boca.

575. Prema uslovima zadatka je $\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{14}{15}$. Dakle, 17 stranica knjige predstavlja jednu petnaestinu knjige, pa knjiga ima 17·15=255 stranica.

576. Za jedan dan Dejan popije četrnaestinu sirupa, a Dejan i Vesna za jedan dan popiju zajedno desetinu sirupa. Dakle, Vesna za jedan dan popije $\frac{1}{10}-\frac{1}{14}=\frac{1}{35}$ sirupa. Prema tome, Vesna bi popila bočicu sirupa za 35 dana.

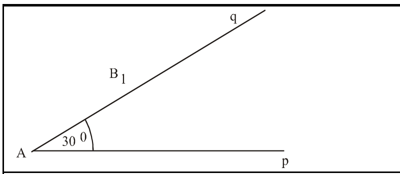
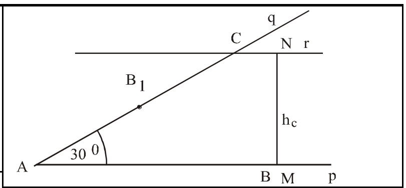
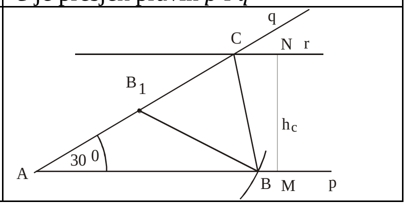
577. Neka je $A=2+4+6+\cdots+2006$ i $B=1+3+5+7+\cdots+2005$.
Tada važi: $A-B=(2+4+6+\cdots+2006)-(1+3+5+7+\cdots+2005.)$;
$A-B=\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1003}=1003.$

578. Nejednačine $\frac{12}{15}<\frac{1-n}{15}<1$ su ekvivelentne sa $\frac{12}{15}<\frac{1-n}{15}<\frac{15}{15}$; tj. $n<-11$ i $n>-14$ i cijeli brojevi −12 i −13 zadovoljavaju datu nejednakost.

579. Prema uslovima zadatka 7 dijeli $49a+7b$. Kako je $286=40\cdot 7+6$, to zaključujemo da je $c=6$, pa je $7a+b=40$, odnosno $a=b=5$. Dakle, $\overline{abc}=556$.

580. Neka je $A=1+3+5++7+\cdots+2005$ i $B=2+4+6+8+\cdots+2006$. Tada važi: $A-B=(1+3+5++7+\cdots+2005)-(2+4+6+8+\cdots+2006)$; $A-B=\underbrace{-1-1-1-1\cdots-1+1}_{1003}=-1003$.

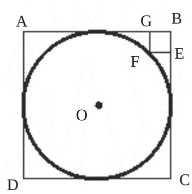
581.

<table>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>1. Konstrukcija ugla $pAq=30^0$.</td><td>2. Konstrukcija normale $MN=hc=3\ cm$ na pravu p. Konstruišemo kroz tačku N pravu r paralele sa pravom p. Tačka C je presjek pravih p i q</td></tr>
<tr><td>3. - Odredimo tačku B_1; tačka B_1 je središte duži AC: $AB_1= AB_1$.
- Konstrukcija kružnice $k(B_1,3{,}5\ cm)$ koja siječe pravu p u tački B.
4. Trougao ABC</td><td>
</td></tr>
</table>

582. Dati prirodni brojevi pri dijeljenju sa 7 imaju ostatke 1, 2, 3, 4, 5 i 6. To su brojevi oblika $7n+1$, $7n+2$, $7n+3$, $7n+4$, $7n+5$, $7n+6$. Njihov zbir je $42n+21$. Oba sabirka su djeljiva sa 21 pa je i njihov zbir djeljiv sa 21, što je trebalo dokazati. Pri dijeljenju ovog zbira sa 42 dobije se ostatak 21.

583. $(n-1)^2+n^2+(n+1)^2+(n+2)^2=5334$; $4n^2+4n+6=5334$; $n^2+n-1332=0$; $(n+37)\cdot(n-36)=0$; $n=36$. Najmanji broj je 35.

584. Neka je R poluprečnik upisane kružnice, sl. 210, pa je $AB=2R$ i $OB=R\sqrt{2}$. takođe važi $OB=OF+FB=R+\sqrt{2}$. Iz $R\sqrt{2}=R+\sqrt{2}$ slijedi $R=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$, tj. $AB=2R=\left(4+2\sqrt{2}\right)cm$. Površina kvadrata: $P_{ABCD}=(2R)^2=24+16\sqrt{2}=8\left(3+2\sqrt{2}\right)cm^2$.



Sl. 210

585. $a-b=\frac{1^2}{1}+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\frac{4^2-3^2}{7}+\cdots+\frac{1001^2-1000^2}{2001}-\frac{1001^2}{2003}$.
Kako je $\frac{(n+1)^2-n^2}{2n+1}=\frac{2n+1}{2n+1}=1$, važi
$a-b=\underbrace{1+1+1+1+\cdots+1+1}_{1001}-\frac{1001^2}{2003}=1001-\frac{1002001}{2003}$.

586. Uočimo da je $P(9)=9^{101}\cdot(9-1)^{101}=(9\cdot8)^{101}$, a $P(3)=3^{101}\cdot(3-1)^{101}=(3\cdot2)^{101}$ i $P(4)=4^{101}\cdot(4-1)^{101}=(4\cdot3)^{101}$.
Tada važi, $P(3)\cdot P(4)=(3\cdot2)^{101}\cdot(4\cdot3)^{101}=(9\cdot8)^{101}=P(9)$; $P(9)-P(3)\cdot P(4)=0$.

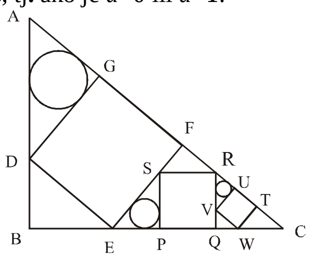
587. Vidi rješenje zadatka **4**.

588. *a*) Trocifreni palindromi su oblika $\overline{aba}$. Broj a se može izabrati na devet načina, a broj b na deset načina. Dakle, trocifrenih palindroma ima $9\cdot10=90$. *b*) Četverocifreni palindromi su oblika $\overline{abba}$. Broj a se može izabrati na devet načina, a broj b na deset načina. Dakle, četverocifrenih palindroma je $9\cdot10=90$.

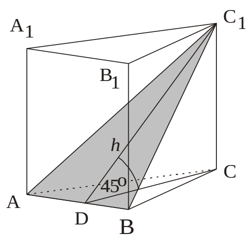
589. Kako $n!$ ima činilac 13, a nema činioca 17 te zaključujemo da je $13\leq n<17$. Takođe, dati proizvod ima tri puta činilac 5; on se javlja u brojevima 5, 10 i 15, pa je $n=15$ ili $n=16$. Prema zadataku 2 je činilac brojeva 2, 6, 10 i 14, dva puta činilac brojeva 4 i 12, te tri puta broja 8, četiri puta broja 16. Znači broj 2 se javlja kao činilac 15 puta. Dakle, $n!=16!=1\cdot2\cdot3\cdot4\cdot\ldots15\cdot16$.

590. Pravougli trougovi ADG, ESP i RVU su slični sa $\triangle ACB$ (sl. 211) i slični su međusobno, jer su im svi odgovarajući unutrašnji uglovi jednaki, kao uglovi sa normalnim kracima. Zbog toga su im proporcionalne stranice, ali i poluprečnici pisanih krugova. Dakle, ako poluprečnik kruga, srednjeg po veličini, označimo sa r, biće $99:r=r:19$, pa je $r^2=99\cdot19$, pa je $r=\sqrt{99\cdot19}=3\sqrt{209}\ cm$.

591. Iz prve jednačine je a≥0, a iz druge važi: x2+2x=a–1; (x+1)2=a. Kako je $|x+1|=\sqrt{(x+1)^2}$, to je $|x+1|=\sqrt{a}$. Jednačine su ekvivalentne ako je $a=\sqrt{a}$, tj**.** ako je a=0 ili a=1.



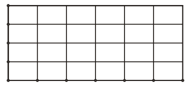
Sl. 211



Sl. 212

592. Neka je a stranica baze pravilne trostrane prizme, sl. 212. Traženi presjek je $\triangle ABC_1$. Prema uslovima zadatka, $\triangle DCC_1$ je jednakokraki pravougli, pa je visina presjeka $\boldsymbol{h=C_1D=CD\sqrt{2}}$. Kako je $\boldsymbol{CD=\frac{a\sqrt{3}}{2}}$, to je $\boldsymbol{h=\frac{a\sqrt{6}}{2}}$, pa je površina presjeka $\boldsymbol{Q=\frac{ah}{2}=\frac{a^2\sqrt{6}}{4}}$. Kako je $\boldsymbol{\frac{a^2\sqrt{3}}{4}=5\sqrt{2}}$, to je $\boldsymbol{a^2=20\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}}$, pa je Q=10 cm^2.

593. Pravougaonik određujemo dužinom i širinom. Dužina je određena početkom i krajem duži, tj. sa dvije tačke. Kako na svakoj vodoravnoj duži imamo 7 tačaka, to dvije tačke odredimo na $(7 \cdot 6): 2 = 21$ način. Slično, na svakoj uspravnoj duži imamo 5 tačaka, dvije odredimo na $(5 \cdot 4): 2 = 10$ načina. Da bi odredili pravougaonike, svaku dužinu kombinujemo sa svakom širinom i pravougaonika je $21 \cdot 10 = 210$.

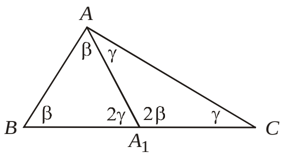


594. $\overline{abcd} = 100 \cdot \overline{ab} + \overline{cd} = 100 \cdot 5 \cdot \overline{cd} + \overline{cd} = 501 \cdot \overline{cd} = 3 \cdot 167 \cdot \overline{cd}$.

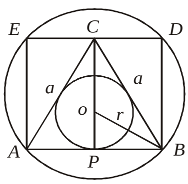
595. $6048=2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot3\cdot7$. Traženi broj je najmanji ako bude imao najmanji broj cifara. Dakle, cifre su što moguće veće. Od prostih činilaca odredimo što je moguće veće cigre: $9=3\cdot3$ i $8=2\cdot2\cdot2$. Očigledno je da cifra 7 mora biti sama. Od preostalih činilaca 2, 2 i 3 možemo dobiti cifre 2 i 6 ili 4 i 3. Prema uslovima zadatka, preostale dvije cifre su 2 i 6 i traženi broj je 26789.

596. Prema definiciji operacije $\triangle$ važi: $1 \triangle 2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ i $3 \triangle 4 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$, pa je $(1 \triangle 2) \triangle (3 \triangle 4) = \frac{1}{2} \triangle \frac{1}{4} = 1 - \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} = -1$.

597. Prema uslovima zadatka je $AA_1 = \frac{BC}{2}$. Trouglovi AA_1C i AA_1B su jednakokraki i važi $\measuredangle A_1AB=\measuredangle A_1BA=\beta$; $\measuredangle A_1CA=\measuredangle A_1AC=\gamma$, sl. 213. Kako je $\measuredangle BA_1A=2\gamma$ i $\measuredangle CA_1A=2\beta$ (spoljašnji uglovi trouglova), važi $2\beta+2\gamma=180^{\circ}$; $\measuredangle BA_1A+\measuredangle CA_1A=2\beta+2\gamma=180^{\circ}$, pa je $\beta+\gamma=90^{\circ}$. Dakle, $\measuredangle A=90^{\circ}$.



Sl. 213



Sl. 214

598. Neka je $\frac{a+b}{2} = \frac{b+c}{3} = \frac{c+a}{5} = k$, $k \in N$. Tada je $a+b=2k$; $b+c=3k$; $c+a=5k$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo $a+b+c=5k$. Iz jednakosti $a+b=2k$ i $a+b+c=5k$ dobijamo $c=3k$. Iz jednakosti $b+c=3k$ i $a+b+c=5k$ slijedi $a=2k$, a iz $c+a=5k$ i $a+b+c=5k$ dobijamo $b=0$. Kako je $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, to važi $\overline{abc} = 203k$. Za $k=1$ je $\overline{abc} = 203$; za $k=2$ je $\overline{abc} = 406$; za $k=3$ je $\overline{abc} = 609$.

599. $3^{n+2}-2^{n+2}+3^n-2^n=3^n\cdot(3^2+1)-2^n\cdot(2^2+1)=10\cdot3^n-5\cdot2^n$. Broj $10\cdot3^n$ je djeljiv sa 10 za svaki prirodan broj n, a sa 10 je djeljiv i broj $5\cdot2^n$. Dakle, i razlika tih brojeva je djeljiva sa 10 što je i trebalo dokazati.

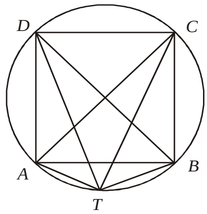
600. Kako je $\frac{n+12}{n-12} = \frac{n-12+24}{n-12} = 1 + \frac{24}{n-12}$, slijedi: $n-12$ djelilac broja 24, tj. $n-12 \in \{1, 2, 3, 4, 6, 8, 12, 24\}$. Direktnim provjeravanjem (vidi tabelu).

$n-12$	1	2	3	4	6	8	12	24
n	13	14	15	16	18	20	24	36
$\frac{24}{n-12}$	24	12	8	6	4	3	2	1
$1+\frac{24}{n-12}$	25	13	9	7	5	4	3	2
$\sqrt{\frac{n+12}{n-12}}$	5		3			2		

dobijamo, $n\in\{13,15,20\}$, te je za date brojeve izraz $\sqrt{\frac{n+12}{n-12}}$ prirodan broj.

601. U jednakostraničnom $\triangle ABC$, sl. 214, stranice a poluprečnik r upisanog kruga je $r=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Prema zadatku dobijamo $a=2\sqrt{3}\ cm$, pa je visina CP=3 cm. Dakle, $AB=2\sqrt{3}\ cm$ i AE=3 cm. Primijenimo Pitagorinu teoremu na trougao ABE: $BE^2=EA^2+AB^2$; $BE^2=3^2+\left(2\sqrt{3}\right)^2$; $BE^2=21$. Kako je poluprečnik R veće kružnice $\frac{BE}{2}$, to je $R=\frac{\sqrt{21}}{2}\ cm$.

602. Primijenimo Pitagorinu teoremu na pravougle trouglove ATC i DTB, sl. 215: $\triangle ATC$: $AT^2+TC^2=AC^2$ (1); $\triangle TDB$: $TD^2+TB^2=BD^2$ (2). Iz (1) i (2) slijedi $AT^2+BT^2+CT^2+DT^2=AC^2+BD^2$. Kako su AC i BD dijagonale kvadrata $ABCD$, to je $AC^2+BD^2=4\cdot AB^2$ i važi $AT^2+BT^2+CT^2+DT^2=4\cdot AB^2$; $AT^2+BT^2+T^2+DT^2=100$.



Sl. 215

603. Za članove niza važi $-7+14=-21+28=-35+42=-49+56=...=7$; (zbir prvog i drugog, trećeg i četvrtog, petog i šestog, itd. je 7). Da bi zbir prvih n članova bio 140 potrebno je 20 takvih parova. Dakle, zbir prvih 40 članova niza je 140.

604. Prema zadatku, iz prve jednakosti slijedi $f(1)+f(2)+f(3)+\cdots+f(10)=10$; $(a+b)+(2a+b)+(3a+b)+\cdots+(10a+b)=10$; $(1+2+3+\cdots+10)a+10b=10$; $55a+10b=10$; $11a+2b=2$. Slično, iz jednakosti $f(1)-f(2)+f(3)-\cdots-f(10)=-10$ slijedi $(a+b)-(2a+b)+(3a+b)-\cdots-(10a+b)=-10$; $-5a=-10$. Iz jednakosti $11a+2b=2$, za a=2, dobijamo b=–10. Dakle, $f(x)=2x-10$, pa je $f(100)=2\cdot100-10=190$.

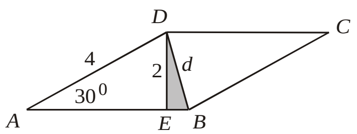
605. Prema zadatku važi $x+y<100$. Dakle, za x=1 imamo uređene parove $(1,y)$ koji su rješenja nejednačine $x+y<100$. Takvih uređenih parova ima 98. Slično, za x=2 imamo uređene parove $(2,y)$ koji su rješenja nejednačine $x+y<100$. Takvih uređenih parova ima 97. Dakle, zaključujemo da je jedan uređeni par oblika $(98,y)$ rješenje nejednačine $x+y<100$. Dakle, broj rješenja jednačine $x+y+z=100$ u skupu prirodnih brojeva je $98+97+96+\cdots+2+1=\frac{98\cdot 99}{2}=4851$.

606. Iz datog sistema slijedi: $\frac{1}{yz}+\frac{1}{xz}=\frac{1}{2}, \frac{1}{xz}+\frac{1}{xy}=\frac{5}{6}, \frac{1}{yz}+\frac{1}{xy}=\frac{2}{3}$. Saberimo ove tri jednačine i zbir podijelimo sa 2: $\frac{1}{xy}+\frac{1}{xz}+\frac{1}{yz}=1$. Oduzimanjem prethodnih jednačina od ove posljedne dobijamo: $\frac{1}{xy}=\frac{1}{2}; \frac{1}{xz}=\frac{1}{3}; \frac{1}{yz}=\frac{1}{6}$, odnosno $xy=2$, $xz=3$, yz=6. Množenjem ovih jednačina dobijamo $x^2y^2z^2=36$, odnosno, zbog uslova $x>0$, $z>0$, $y>0$: $xyz=6$. Dalje, iz jednačina $xy=2$, $xz=3$, $yz=6$ i $xyz=6$ dobijamo $x=1$, $y=2$, $z=3$.

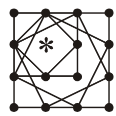
607. Prema uslovima zadatka visina H prizme jednaka je dijagonali $d=BD$ osnove, sl. 216. Iz pravouglog $\triangle AED$, sa oštrim uglom od 30^0, dobijamo da je $DE=2\ cm$ i $AE=2\sqrt{3}\ cm$, odnosno $BE=\left(4-2\sqrt{3}\right)cm$. Kako je $d^2=BE^2+DE^2=(4-2\sqrt{3})^2+2^2\ =8\ \cdot(\sqrt{3}-1)^2$, to je $d=2\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)=H$. Površina osnove je

$B=a\cdot h=8\ cm^2$, a površina prizme $P=2B+4aH=\left(16+32\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)\right)cm^2$.

608. Može se nacrtati najviše 5 kvadrata koji ispunjavaju zadane uslove sl. 217.



Sl. 216



Sl. 217

609. Obje prodavnice su prodale: $365-(102+76)=187\ kg$ jabuka. Za to su dobile $434+875=1309$ KM, pa je cijena 1 kg jabuka bila: $1309:187=7$ KM. U prvoj prodavnici je na početku bilo: $434:7+102=164\ kg$ jabuka, a u drugoj prodavnici: $875:7+76=201\ kg$ jabuka.

610. Neka su x, $x+1$, $x+2,\ldots, x+19$ uzastopni prirodni brojevi. Tada je:
$x+(x+1)+(x+2)+(x+3)+\ldots+(x+18)+(x+19)=2590$;
$20x+(1+2+3+4+\ldots+19)=2590$; $20x+(1+19)+(2+18)+\ldots+(9+11)+10)=2590$;
$20x+(9\cdot 20+10)=2590$; $x=120$. Traženi brojevi su: 120, 121, 122, ... ,139.

611. Kako je $12=3\cdot 4$, broj je djeljiv sa 12 ako je djeljiv i sa 3 i sa 4. S obzirom da je 2007 djeljiv sa 3 onda je $2007\cdot 2008$ djeljiv sa 3. Budući da je 2008 djeljivo sa 4, onda je $2007\cdot 2008$ djeljiv sa 4. Dakle. $2007\cdot 2008$ je djeljiv sa 12. To znači da i sabirak $17\cdot\overline{16a}$ mora biti djeljiv sa 12. Kako je 17 prost broj, onda je $\overline{16a}$ djeljivo sa 12. Broj $\overline{16a}$ je djeljiv sa 4 ako je $a\in\{0, 4, 8\}$. Direktnim provjeravanjem dobijamo da je za $a=8$ broj $\overline{16a}$ djeljiv sa 3.Tražena cifra je $a=8$.

612. Neka je a džeparac jednog djeteta. Kada je svako dijete potrošilo po 30 KM dobijamo $(a-30)+(a-30)+(a-30)=a$, odakle dalje dobijamo $a=45$ KM. Dakle, džeparca jednog djeteta je 45 KM. Majka je za džeparac djece izdvojila 135 KM.

613. Isječeno je manje od polovine svih zasada kupusa i manje od polovine svih zasada luka, znači isječeno je manje od polovine svih zasada.

614. Prijavilo se $\frac{11}{9}$ od planiranog broja učenika, odustalo je $\frac{3}{11}$ od prijavljenog broja, što iznosi $\frac{3}{11}\cdot\frac{11}{9}=\frac{1}{3}$. Na izlet je otišlo $\frac{11}{9}-\frac{1}{3}=\frac{8}{9}$ prijavljenih učenika. Znači $\frac{1}{9}$ prijavljenog broja učenika je 5 učenika, pa je 9·5=45 broj prijavljenih učenika. Dakle, na zimovanje je otišlo 45–5=40 učenika.

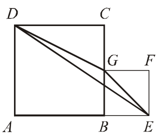
615. Kako je $\frac{a+89}{a-2}=\frac{a-2+91}{a-2}=1+\frac{91}{a-2}$ i 91=7·13, to postoje 4 mogućnosti: a) $a-2=1$, pa je $a=3$; b) $a-2=7$, pa je $a=9$; c) $a-2=13$, pa je $a=15$; d) $a-2=91$, pa je $a=93$. Traženi brojevi su 3, 9, 15 i 93.

616. Zbir dužina dvije stranice trougla mora biti veći od dužine treće stranice $a+2b=22$. Kako su $2b$ i 22 parni brojevi, tada i a mora biti paran broj. Zbog nejednakosti trougla je $2b>a$, mogući slučajevi su dati u tabeli

a	2	4	6	8	10
b	10	9	8	7	6

Postoji pet različitih jednakokrakih trouglova koji zadovoljavaju uslove zadatka.

617. Prema uslovima zadatka i oznakama na sl. 218 važi: $P_{BEG}=\frac{10\cdot 10}{2}=50\ cm^2$.
$P_{ABGD}=P_{ABCD}-P_{CDG}=20\cdot 20-\frac{20\cdot 20}{2}=300\ cm^2$; $P_{AED}=\frac{30\cdot 20}{2}=300\ cm^2$;
$P_{DEG}=(P_{BEG}+P_{ABGD})-P_{AED}=(50+300)-300=50\ cm^2$.
$P_{DEG}=(P_{BEG}+P_{ABGD})-P_{AED}=(50+300)-300=50\ cm^2$.



Sl. 218

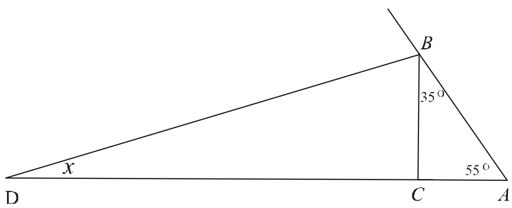
618. Da su na tom takmičenju svi zadaci koje je Jovan riješio bili teži, on bi osvojio 30 bodova. Ali, za svaki lakši zadatak, nezavisno od toga da li ga je Jovan riješio ili ne, njemu se ukupan zbir bodova umanjuje za 1 bod, tj. on dobija 1 bod manje nego što bi dobio da je rješavao teže zadatke. Kako je 14=30–16, znači da je bilo 16 lakših zadataka.

619. Neka u prvoj vreći ima x kg brašna. Tada je, prema uslovima zadatka, u prvoj vreći 80% $x\ kg$, odnosno $\frac{4}{5}\ x\ kg$, a u trećoj 42,5% od $\frac{4}{5}\ x$, tj. $\frac{425}{1000}\cdot\frac{4}{5}\ x=\frac{17}{50}\ x$. Dalje, prema uslovima zadatka, važi $\frac{4}{5}\ x+x+\frac{17}{50}\ x=64{,}2$, pa je $x=30$. Dakle, u prvoj vreći ima 24 kg, drugoj 30 kg i trećoj 10,2 kg.

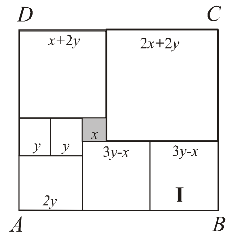
620. Neka je s udaljenost od mjesta susreta do Doboja i neka je autobus prešao taj put za vrijeme t_1, a privatni autobus za t_2, tada je $s=100\cdot t_1=120\cdot t_2$ i $t_2=t_1-336$ s, odnosno $t_2 = t_1 - \frac{336}{3600}$. Odavde slijedi $100t_1 = 120\left(t_1 - \frac{336}{3600}\right)$, tj. $t_1 = 0{,}56\,h$. Dakle, s=100·t_1=100·0,56=56 km.

621. Ako površina manje njive iznosi $2p$, površina veće njive je $3p$. Ukupna površina obje njive je $5p$ što znači da svaku voćnu kulturu treba zasaditi na površini $\frac{5}{2}\,p$.. Manja njiva površine $2p$ je zasađena u omjeru 3:5, pa je pod jagodama $\frac{3}{8}$ od $2p$, tj. $\frac{3}{4}\,p$. Tada je na većoj njivi pod jagodama $\frac{5}{2}\,p - \frac{3}{4}\,p = \frac{7}{4}\,p$. Ostatak na većoj njivi je pod malinama, a to je $3p - \frac{7}{4}\,p = \frac{5}{4}\,p$. Dakle, jagode i maline na većoj njivi treba zasaditi u omjeru $\frac{7}{4}\,p : \frac{5}{4}\,p = 7 : 5$.

622. Spoljašnji uglovi datog $\triangle ABC$ su suplementni unutrašnjim uglovima i iznose 125^0, 145^0 i 90^0, sl. 219. Najkraća stranica leži nasuprot najmanjem uglu, to je stranica AC. Simetrala najvećeg spoljašnjeg ugla kod tjemena B siječe pravu AC u tački D. Traženi ugao x je oštri ugao pravouglog $\triangle BDC$ i važi x+$\sphericalangle CBD$= 90^0. Kako je $\sphericalangle CBD = \frac{145^0}{2}$ (polovina spoljašnjeg ugla $\triangle ABC$, $\sphericalangle CBA$=$72^0 30'$), pa važi x=90^0–$72^0 30'$= $17^0 30'$.



Sl. 219



Sl. 220

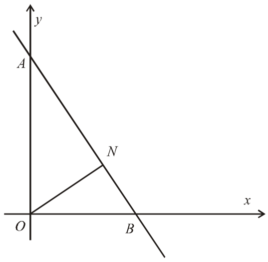
623. Označimo sa x i y stranice najmanjeg i sljedećeg po veličini kvadrata, a zatim izrazimo stranice svih ostalih kvadrata pomoću x i y. Na sl. 220. su u svakom kvadratu upisane dužine njegovih stranica. Neka je k stranica kvadrata. Tada je AD=$(x$+$2y)$+y+$2y$ i BC=k+$(2x$+$2y)$. Kako je AD=BC, to važi $(x$+$2y)$+y+$2y$=k+ $(2x$+$2y)$, pa je k=$3y$–x. Kako je AB=CD=32 cm, slijedi $2y$+$(3y$–$x)$+$(3y$–$x)$=32 i $(x$+$2y)$+$(2x$+$2y)$=32, odakle dobijamo x=4 i y=5. Dakle, AD=x+$5y$=29 cm.

624. $\sqrt{333^2 + 444^2} = \sqrt{(3 \cdot 111)^2 + (3 \cdot 111)^2} = \sqrt{111^2 \cdot (3^2 + 4^2)} = \sqrt{111^2 \cdot 5^2} = 555.$

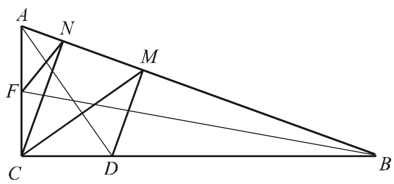
625. Na ostrvu je x muškaraca i y žena. Tada je $\frac{2}{3} \cdot x = \frac{3}{5} \cdot y$, pa je $y = \frac{10}{9} \cdot x$. U braku nisu $\frac{1}{3} \cdot x$ muškaraca i $\frac{2}{5} \cdot y$ žena. Dakle, $\frac{\frac{1}{3} x + \frac{2}{5} y}{x+y} = \frac{\frac{1}{3} x + \frac{10}{9} x}{x + \frac{10}{9} x} = \frac{7}{9}$ nije u braku.

626. Prava p siječe koordinatne ose u tačkama $A(0,2)$, $B(\frac{3}{2},0)$. Tražena dužina je visina iz tačke ON, trougla ABO, sl. 221, pa važi $AB^2 = OA^2 + OB^2 = 4 + \frac{9}{4} = 2{,}5$. Kako je površina $\triangle ABO$: $\frac{OA \cdot OB}{2}$, odnosno $P = \frac{AB \cdot ON}{2} \cdot$, to je: $OA \cdot OB = AB \cdot ON$, odnosno $2 \cdot \frac{3}{2} = \frac{5}{2} \cdot ON$; $ON = \frac{6}{5}$.

627. Trougao FCN je jednakokraki, jer je $CF=FN$ (osobina simetrale BF), sl. 222. Takođe i $\triangle CDM$ je jednakokraki, jer je $CD=DM$ (osobina simetrale AD). Odavde slijedi $\sphericalangle FCN=\sphericalangle CNF$ i $\sphericalangle DCM=\sphericalangle DMC$. Kako je $\sphericalangle A=90^o-20^o=70^o$, to iz pravouglog $\triangle CNA$ slijedi $\sphericalangle FCN=20^o$. Slično dobijamo $\sphericalangle BDM=70^o$. Uočimo četverougao $CBNF$. Tada je $\sphericalangle CFN=360^o-180^o-20^o=160^o$. U jednakokrakom $\triangle$FCN važi: $\sphericalangle$FCN+$\sphericalangle$CNF+$\sphericalangle$CFN=180^o. Kako je $\sphericalangle$FCN=$\sphericalangle$CNF, važi $\sphericalangle FCN=\frac{1}{2}\sphericalangle AFN=10^o$. Slično, zaključujemo $\sphericalangle DCM=35^o$ i slijedi $\sphericalangle MCN=90^o-(\sphericalangle CFN+\sphericalangle DCM)=90^o-45^o=45^o$.



Sl. 221



Sl. 222

628. *a*) Cifa 0 napisana je 11 puta; 10,20,30,40, 50, 60, 70, 80, 90, 100.
b) Cifra 7 je na mjestu cifre jedinica napisana 10 puta; 7, 17, 27, 37, 47, 57, 67, 77, 87, 97, a na mjestu cifre desetica 10 puta, dakle ukupno, 20 puta.
c) Cifra 1 je napisana 10 puta na mjestu cifre jedinica, 10 puta na mjestu cifre desetica i jednom na mjestu cifre stotica, dakle ukupno, 21 put.

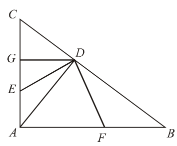
629. Jasno je da je $o=1=u$, a $i=0$. Očigledno je da $s+s$ uvećano za jedinicu daje 1 i jedan „prenosimo" što ukazuje da je $s=5$, a $e=4$. Kako $d+t$ daje t i jedan „prenosimo" to je $d=9$. Sada nalazimo da je $t=6$, a v i r mogu imati vrijednosti 8 ili 3 što uslovljava da je $a=7$ pa imamo dva rješenja:

$$\begin{array}{ccccccc} & 9 & 8 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ + & 6 & 3 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 6 & 1 & 5 & 1 & 2 & 7 \end{array} \quad \text{ili} \quad \begin{array}{ccccccc} & 9 & 3 & 4 & 5 & 6 & 0 \\ + & 6 & 8 & 0 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 1 & 6 & 1 & 5 & 1 & 2 & 7 \end{array}$$

630. Očigledno da broj učenika nije djeljiv ni sa 2, ni sa 3, ni sa 4. Ako bi došao još jedan učenik onda bi broj učenika bio djeljiv i sa 2 i sa 3 i sa 4. Najmanji takav broj je 12. Dakle, prema zadatku jedan učenik nedostaje te ih ima 11.

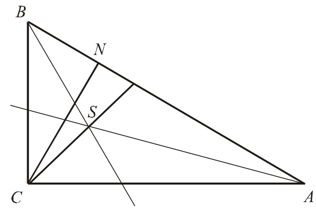
631. Kako je na desnoj strani jednakosti paran broj, to je i lijeva strana paran broj. Dakle, p je paran broj, a kako je p prost, to je $p=2$. Lako je uočiti da je $n=8$.

632. 10 trouglova: CGD, GED, EAD, AFD, DFB, DAB, GAD, CAD, slika 223.

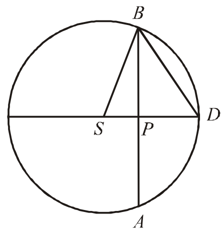


Sl. 223

633. Zbir cifara svakog od traženih brojeva treba da bude djeljiv sa 5 i sa 9, a ne može biti veći od 50 (jer su brojevi desetocifreni). Dakle, njihov zbir je 45, pa u zapisu traženog broja koristi se devet 5 i jedna 0. Važi i obrnuto, desetocifren broj zapisan pomoću devet petica i jedne nule, djeljiv je sa 9. U traženom desetocifrenom broju nula može biti zapisana na svakom mjestu osim na prvom, te je možemo napisati na devet različitih mjesta, odakle slijedi da postoji 9 brojeva koji ispunjavaju tražene uslove.



Sl. 224



Sl. 225

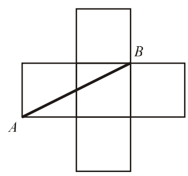
634. Na stranim jezicima je 20% knjiga, što, prema uslovima zadatka iznosi 1900 knjiga. Od toga je 60% knjiga na engleskom jeziku je bilo 60%, što iznosi 1140 knjiga. Na ruskom jeziku je 1900−1140=760 knjiga .

635. Neka su $\alpha=\sphericalangle A$ i $\beta=\sphericalangle B$ oštri uglovi pravouglog $\triangle ABC$, sl. 224. Uočimo $\triangle ASB$. Prema uslovima zadatka je $\sphericalangle ASB = 180^0 - \frac{\alpha-\beta}{2} = 180^0 - \frac{90^0}{2} = 135^0$, pa je $\sphericalangle NCS=135^0:9=15^0$. Tada je $\sphericalangle NCB=45^0-15^0=30^0$, pa je $\sphericalangle CBA=\beta=90^0-30^0=60^0$ i $\sphericalangle CAB=\alpha=90^0-60^0=30^0$.

636. Neka knjiga ima x stranica. Tanja je prvog dana pročitala $\frac{1}{3}\cdot x$, stranica, drugog dana $\frac{2}{5}\cdot x$, a trećeg $\frac{2}{5}\cdot x-28$ stranica. Dakle, važi: $\frac{1}{3}\cdot x+\frac{2}{5}\cdot x+\frac{2}{5}\cdot x-28=x$, pa je $x=210$.

637. Prema zadatku, $\triangle BSD$ je jednakokraki i važi $\sphericalangle SDB=\sphericalangle DBS$, sl. 225. Kako je $\sphericalangle DBP=\sphericalangle DBS-\sphericalangle PBS$ slijedi $\sphericalangle DBP<\sphericalangle DBS$, tj. $\sphericalangle DBP<\sphericalangle SDB$, pa je $\sphericalangle DBP< \sphericalangle PDB$. Uočimo $\triangle PDB$. Kako u trouglu naspram većeg ugla leži veća stranica, vrijedi $PD<PB$, čime je tvrdnja dokazana.

638. Neka je a dužina stranice kvadrata sl. 226. Tada je: $a^2+(2a)^2=x^2$; $5a^2=x^2$; $5a^2=10^2\ cm^2=100\ cm^2$. Površina figure je $P=5a^2=100\ cm^2$.

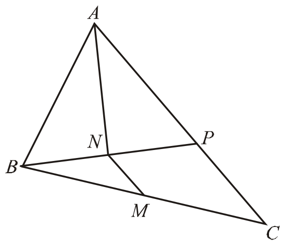


Sl. 226

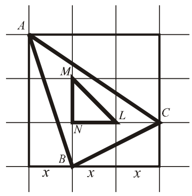
639. Neka duž BN siječe stranicu AC u tački P, sl. 227. Kako duž AN polovi ugao BAC, to je $\sphericalangle BAN = \sphericalangle NAP$. Kako pravougli trouglovi BNA i NPA imaju i zajedničku stranicu to je $\triangle BNA \cong \triangle NPA$. Dalje zaključujemo da je $\triangle BPA$ jednakokraki i važi $PC = AC - AP = AC - AB$. Kako je AN visina jednakokrakog $\triangle BPA$, slijedi da je N polovište duži BP. Dalje, prema uslovima zadatka, zaključujemo, MN je srednja linija $\triangle BCP$ i važi $MN = \frac{PC}{2} = \frac{AC-AB}{2}$.

640. Iz jednakosti $2a=3b$, $2a=4c$, $2a=5d$ slijedi $b = \frac{2a}{3}$, $c = \frac{a}{2}$, $d = \frac{2a}{5}$. Kako je $2a=x(a+b+c+d)$, dobijamo $2a = x\left(a + \frac{2a}{3} + \frac{a}{2} + \frac{2a}{5}\right)$; $x = \frac{60}{77}$.

641. Neka je x dužina kvadrata iz kvadratne mreže, sl. 228. Tada je $P_{MNL} = \frac{x^2}{2}$. Uočimo da je trougao ABC upisan u kvadrat stranice $3x$, pa je njegova površina $9x^2$. Dakle, važi $P_{ABC} = 9x^2 - \left(\frac{x \cdot 3x}{2} + \frac{x \cdot 2x}{2} + \frac{3x \cdot 2x}{2}\right) = \frac{7x^2}{2}$, pa je
$P_{ABC} : P_{MNL} = \frac{7x^2}{2} : \frac{x^2}{2} = 7 : 1$.



Sl. 227



Sl. 228

642. Vidi rješenje zadatka **624.**

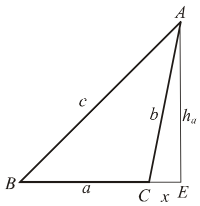
643. Neka su a, b i c traženi prosti brojevi. Tada vrijedi jednakost $a \cdot b \cdot c = 5(a+b+c)$ Kako je desna strana jednakosti djeljiva sa 5, zaključujemo da je i lijeva strana djeljiva sa 5. Zbog uslova zadatka potrebno je da je jedan od tri broja djeljiv sa 5. Neka je $c=5$. Tada važi $a \cdot b \cdot 5 = 5(a+b+5)$; $a \cdot b = a+b+5$; $a \cdot b - a = b+5$; $a(b-1) = b+5$; $a = \frac{b+5}{b-1} = \frac{b-1+6}{b-1} = 1 + \frac{6}{b-1}$. Prema uslovima zadatka, a je prirodan broj pa zaključujemo da je $b-1$ djelilac broja 6, pa je $b-1=1$; $b-1=2$; $b-1=3$ ili $b-1=6$. Odavde slijedi: $b \in \{2,3,4,7\}$. Kako je b prost broj, to važi $b \in \{2,3,7\}$. Dalje dobijamo da je $b=2$ i $a=7$; $b=3$ i $a=4$; $b=7$ i $a=2$. Kako $a=4$ nije prost broj, traženi brojevi je $a=2$, $b=7$, $c=5$.

644. Prvih nekoliko brojeva niza su: 37, 58, 77, 86, 85, 77, 86. Prva dva broja je ispisao za dvije sekunde, pa mu je još ostalo 298 sekundi. Jasno je da se poslije drugog broja svaki treći broj ponovi, a kako 298 pri dijeljenju sa 3 ima ostatak 1 to će biti ispisan broj 77.

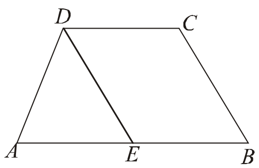
645. $9x^2+4y^2-12xy-16a^2=12 \Leftrightarrow (3x-2y)^2-16a^2=12 \Leftrightarrow (3x-2y-4a)(3x-2y+4a)=12$. Kako je $3x-2y+4a=4$, to je $3x-2y-4a=3$. Kako je $(3x-2y-4a)+(3x-2y+4a)=3+4$, važi $2(3x-2y)=7$; $3x-2y=\frac{7}{2}$.

646. Prema podacima na sl. 229 važi $h^2=b^2-x$; $h^2=c^2-(a+x)^2$. Odavde slijedi $b^2-x^2=c^2-a^2-2ax-x^2$; $b^2+a^2-c^2=-2ax$; $2ax=c^2-a^2-b^2$; $18x=108$; $x=6\ cm$. Dalje, iz $h^2=b^2-x^2$, slijedi $h_a{}^2=H^2=64$; $H=8\ cm$, pa je $P=a\cdot ha+a\cdot H+ b\cdot H+c\cdot H=360\ cm^2$ i $V=\frac{a\cdot h_a}{2}\cdot H=288\ cm^3$.

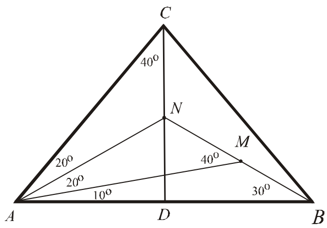
647. Potrebno je odrediti dužinu visine trapeza $ABCD$, sl. 230. Kroz tjeme D trapeza $ABCD$ konstruišimo paralelu sa krakom BC, presjek te paralela i osnovicu AB je tačka E. Kako je $EBCD$ paralelogram, to je $AE=AB-EB=AB-CD=11-7=4\ cm$. S druge strane, visina trapeza jednaka je visini $\triangle AED$ na stranicu AE. Dužine stranica $\triangle AED$ su $3\ cm$, $4\ cm$ i $5\ cm$. Kako je $3^2+4^2=5^2$, prema obrnutoj Pitagorinoj teoremi $\triangle AED$ je pravougli, tj. $\measuredangle A=90^0$. Dakle, krak je okomit na osnovicu trapeza i njegova dužina je visina trapeza. Površina trapeza:
$P=\frac{AB+CD}{2}\cdot AD=\frac{11+7}{2}\cdot 7=27=27\ cm^2$.



Sl. 229



Sl. 230



Sl. 231

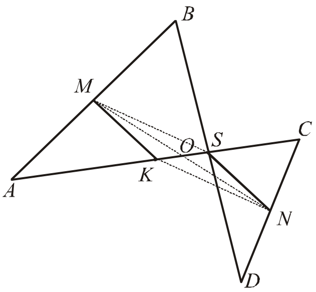
648. Dati broj podijelimo na devet klasa, svaka klasa predstavlja broj zapisan sa devet cifara 1. Dijeljenem tog broja sa 9 svaka klasa daje količnik 12345679 bez ostatka. Količnik datog broja i broja 9 je broj koji ima devet klasa sa ciframa 12345679. Zbir cifara dobijenog količnika je $9\cdot(1+2+3+4+5+6+7+9)$. Dakle, djeljiv je sa 9, pa je i sam količnik djeljiv sa 9. Dakle, dati 81-cifreni broj je djeljiv sa $9\cdot 9$ tj. sa 81.

649. Neka je ABC dati trougao, a CD njegova visina na osnovicu AB koja predstavlja osu simetrije datog trougla, sl. 231. Uglovi na osnovici trougla ABC su $\measuredangle BAC=\measuredangle ABC=50^0$. Označimo sa N presjek prave BM sa visinom CD. Tada je trougao ABN jednakokraki, pa je $\measuredangle BAN=\measuredangle ABN=30^0$. Slijedi, $\measuredangle MAN=20^0$ i $\measuredangle CAN=40^0-20^0=20^0$. U trouglu ABM ugao AMN je spoljašnji pa je $\measuredangle AMN=30^0+10^0=40^0$. Osim toga, $\measuredangle AMN=40^0$, kao polovina $\measuredangle ACB$. Slijedi da su trouglovi ANM i ANC podudarni, stav USU, jer je AN zajednička stranica. Iz ove podudarnosti zaključujemo da je $AM=AC$. Dakle, trougao AMC je jednakokraki, sa uglom $\measuredangle CAM=40^0$, pa je traženi $\measuredangle AMC=70^0$.

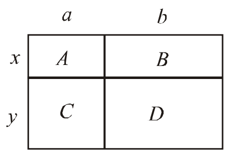
650. Prema uslovima zadatka MK je srednja linija $\triangle ABC$, NS srednja linija $\triangle BCD$, pa slijedi $MK\|BC$ i $MK=\frac{1}{2}BC$, sl. 232. Takođe je $NS\|BC$ i $NS=\frac{BC}{2}$. Prema tome, duži KM i NS su paralelne i jednake među sobom, pa je $NSMK$ paralelogram. Dakle, dijagonale paralelograma se polove, $OM=ON$, što je i trebalo dokazati.

651. Neka su stranice pravougaonika A, B, C i D označene a, b, x, y kao na sl. 233. Tada je $a \cdot x = 200\ cm^2$, $b \cdot x = 302\ cm^2$, $a \cdot y = 600\ cm^2$. Površina pravougaonika D je $P_D = b \cdot y$. Kako je $(b \cdot x) \cdot (a \cdot y) = 302 \cdot 600$, tj. $(a \cdot x) \cdot (b \cdot y) = 302 \cdot 600$ i $a \cdot x = 200$, to je $200 \cdot (b \cdot y) = 302 \cdot 600$, odakle dobijamo $P_D = b \cdot y = 302 \cdot 3 = 906\ cm^2$. Površina velikog pravougaonika je: $200 + 302 + 600 + 906 = 2008\ cm^2$.

652. Ako bi svaki od 55 telefona imao direktnu vezu sa 11 drugih telefona, tada bi bilo $55 \cdot 11$ priključaka (veza). Ako su sve linije direktne, onda broj veza mora biti paran, jer tada svaka linija ima svoje dvije veze. Međutim broj veza je neparan $(55 \cdot 11)$, što znači da ne mogu biti sve linije direktne. Traženo povezivanje nije moguće.



Sl. 232



Sl. 233

653. Skratimo razlomak:

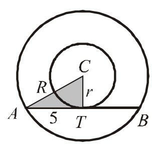
$$\frac{2^{17}+2^{16}+\cdots+2^2+2+1}{2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1} = \frac{(2^{17}+2^{16}+\cdots+2^{10}+2^9)+(2^8+2^7+\cdots+2^1+1)}{2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1}$$

$$\frac{2^9 \cdot (2^8+2^7+\cdots+2+1)+(2^8+2^7+\cdots+2+1)}{2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1} = \frac{(2^8+2^7+\cdots+2^1+1)(2^9+1)}{2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1} =$$

2^9+1. Dakle, $\frac{2^{17}+2^{16}+\cdots+2^2+2+1}{2^8+2^7+\cdots+2^2+2+1} : 3^3 = (2^9+1) : 3^3 = 19$.

654. Iz jednakosti dobijemo $h_a \cdot h_b = c \cdot h_c$, odnosno: $\frac{h_a \cdot h_b}{2} = \frac{c \cdot h_c}{2}$. Iz $P = \frac{c \cdot h_c}{2}$, slijedi $P = \frac{h_a \cdot h_b}{2}$. Takođe, važi $P = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$, pa je $\frac{h_a \cdot h_b}{2} = \frac{a \cdot h_a}{2} = \frac{b \cdot h_b}{2}$ i dobi-jamo $h_b = a$ i $h_a = b$. Dakle, stranice a i b su jedna drugoj odgovarajuće visine, tj. dati trougao je pravougli, a ugao između stranicama a i b je prav.

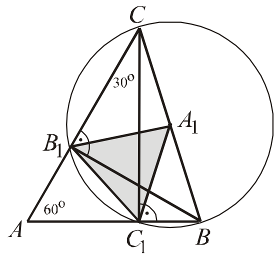
655. Uočimo pravougli $\triangle AST$, sl. 234. Primijenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle ATC$: $R^2 - r^2 = 5^2$. Dakle, površina kružnog prstena: $P = \pi(R^2 - r^2)$; $P = 25\pi\ cm^2$.



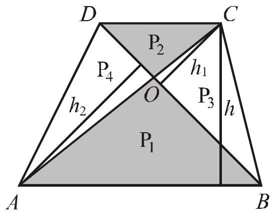
Sl. 234

656. Transformišimo dati izraz: $A = x^2 \cdot (4a^2 - 4ac + c^2) - 4xy \cdot (4a^2 - 4ac + c^2) + 4y^2 \cdot (4a^2 - 4ac + c^2) = (4a^2 - 4ac + c^2) \cdot (x^2 - 4xy + 4y^2) = (2a - c)^2 \cdot (x - 2y)^2 = (6552 - 5552)^2 \cdot (9463 - 9462)^2 = 1000^2 \cdot 1^2 = 1000000$.

657. Kako je $\sphericalangle BB_1C=\sphericalangle CC_1B=90^0$, zaključujemo da tačke B_1 i C_1 pripadaju kružnici prečnika BC, sl. 235. Centar kružnice je tačka A_1, pa je $A_1B_1=A_1C_1$. U pravouglom $\triangle ACC_1$ ugao kod tjemena A je 60^0, pa je $\sphericalangle ACC_1=30^0$. Posljednji ugao je periferijski kojem odgovara centralni ugao $\sphericalangle B_1A_1C_1$. Slijedi da je $\sphericalangle B_1A_1C_1=60^0$. Onda je $\triangle A_1B_1C_1$ jednakostraničan, jer su uglovi kod tjemena B_1 i C_1 jednaki, pa su i oni 60^0.



Sl. 235



Sl. 236

658. Dati broj ima neparan broj desetica pa će i ostatak dijeljenja imati neparan broj desetica, jer djelilac, broj 86420 ima paran broj desetica. I ostali navedeni djelioci imaju paran broj desetica, pa će svaki put ostatak dijeljenja imati neparan broj desetica. Dakle, posljednji ostatak je manji od 20. To je broj 10.

659. Neka su x i y traženi brojevi. Tada je $x^2-y^2=195$, odnosno $(x-y)(x+y)=195$. Kako je $195=3\cdot5\cdot13$, to su mogući sljedeći slučajevi:

$$x-y=1 \quad x-y=3 \quad x-y=5 \quad x-y=13$$
$$x+y=195; \quad x+y=65; \quad x+y=39; \quad x+y=15.$$

Rješenja ovih sistema jednačina su traženi parovi brojeva: $x=98$, $y=97$; $x=34$, $y=31$; $x=22$, $y=17$; $x=14$, $y=1$.

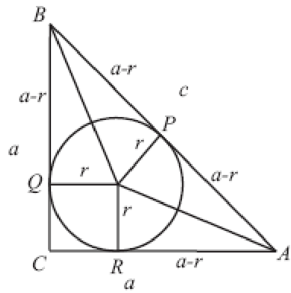
660. Neka su P_3 i P_4 površine trouglova BCO i ADO, sl. 236. Dokažimo da je $P_3=P_4$. Trouglovi BCD i ACD imaju zajedničku osnovicu i visinu h, pa su im jednake i površine. Prema oznakama sa slike je $P_3+P_2=P_2+P_4$. Odavde zaključujemo da je $P_3=P_4$. Važi $P_2=\frac{DO\cdot h_1}{2}$ i $P_2=\frac{BO\cdot h_1}{2}$, pa je $P_2:P_3=DO\cdot h_1:BO\cdot h_1$, odnosno $P_2:P_3=DO:BO$. Slično, koristeći zajedničku visinu h_2 trouglova ADO i ABO, dobijamo $P_3:P_1=DO:BO$, (jer je $P_3=P_4$). Odavde slijedi $P_2:P_3=P_3:P_1$, pa je $P_3^2=P_1\cdot P_2$, tj. $P_3=\sqrt{P_1\cdot P_2}=P_4$. Dakle, površina trapeza $ABCD$ je

$$P=P_1+P_2+P_3+P_4=P_1+P_2+2\sqrt{P_1\cdot P_2}=$$
$$\left(\sqrt{P_1}\right)^2+\left(\sqrt{P_2}\right)^2+2\sqrt{P_1\cdot P_2}=\left(\sqrt{P_1}+\sqrt{P_2}\right)^2.$$

661. $\frac{a+b}{2}-\sqrt{a\cdot b}=\frac{a+b-2\sqrt{a\cdot b}}{2}=\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2}{2}\cdot\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}=\frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}$. Kako je $0<b\le a$, to je $\sqrt{a}+\sqrt{b}\ge2\sqrt{b}$, , pa je $\frac{(a-b)^2}{2\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}\le\frac{(a-b)^2}{2\left(2\sqrt{b}\right)^2}=\frac{(a-b)^2}{8b}$.

662. Visina prizme jednaka je prečniku lopte, $H=2\ cm$, Prema uslovima zadatka lopta dodiruje sve strane prizme, vidi sl. 237, presjeka lopte sa ravni paralelnom sa osnovama prizme. Neka su a kraci i c hipotenuza pravouglog trougla. Kako su tangentne duži iz istih tačaka jednake, to važi $2r=2a-c$, tj. $2r=2a-a\sqrt{2}$. Prema uslovima zadatka je $H=2r=2\ cm$, pa dobijamo da je $a=\frac{2}{2-\sqrt{2}}\cdot\frac{2+\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}=2+\sqrt{2}$. Površina baze piramide je $B=\frac{a^2}{2}$, pa je zapremina

$$V=B\cdot H=\frac{a^2}{2}\cdot \mathrm{H}=\frac{(2+\sqrt{2})^2}{2}\cdot 2=\left(6+4\sqrt{2}\right)cm^3.$$



Sl. 237

663. 5·(31·2·44+38·2·22)+11·(4·117–17·2·2)·4+11·7·(31·2+2·69)= 5·44(62+38) +4·44(117–17)+11·7·2(31+69)=5·44·100+4·44·100+ 11·14·100=55000.

664. Neka je $AB=a$ dužina osnovice, a $AC=BC=b$ dužina kraka. kako je $a+2b=19$, to zbog $b=a+2$ dobijemo $a+2(a+2)=19$, tj. $a=5\ cm$, pa je $b=7\ cm$.

665. Neka je u drugoj posudi prije dolijevanja bilo x litara mlijeka. Tada je u prvoj posudi bilo $3x$ litara. Nakon dolijevanja, u prvoj je posudi bilo $3x+3$ litara, a u drugoj $x+5$ litara i važi jednačina $3x+3=2(x+5)$, čije je rješenje $x=7$. U početku je u prvoj posudi bila 21 litra, a u drugoj 7 litara mlijeka.

666. Neka su a i b traženi brojevi. Tada je $a=64x$ i $b=64y$, pri čemu su x i y prirodni brojevi. Kako je $64x+64y=512$, tj. $x+y=8$. Od četiri moguća slučaja dva ne ispunjavaju uslove zadatka. Naime za $x=2$, $y=6$ i za $x=4$, $y=4$ najveći zajednički djelilac traženih brojeva je veći od 64. Traženi brojevi su:
1.) Za $x=1$ i $y=7$ je $a=64$ i $b=448$. 2.) Za $x=3$ i $y=5$ dobijamo $a=192$ i $y=320$.

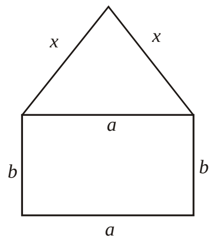
667. Vidi rješenje zadatka **392**.

668. Neka je x traženi broj, tada je $(x:20+3,75)\cdot 0,4=20+8,25$, odnosno $(x:20+3,75)\cdot 0,4=20+8,25$; $(x:20+3,75)=28,25:0,4$; $x:20=70,625-3,75$; $x=1337,5$.

669. Neka je $\overline{ab}=x$ traženi dvocifreni broj, a $\overline{ba}=y$ broj sa zamijenjenim ciframa, Tada je: $78x-78y=2808$, $x-y=36$. Kako je $x=\overline{ab}=10a+b$, $y=\overline{ba}=10b+a$, iz $x-y=36$ dobijemo $10a+b-(10b+a)=36$, tj. $a-b=4$. Kako je $a=3b$, to važi $b=2$, pa je $a=6$. Traženi dvocifreni broj je 62, a tačan proizvod: 78·62=4836.

670. Neka su a i b dužine stranica pravougaonika, $a>b$ (sl. 238). Iz $2a+2b=23{,}2$ slijedi $a+b=11{,}6$. Zbog $a=b+4{,}2$ važi $b+4{,}2+b=11{,}6$, pa je $b=3{,}7\ cm$, $a=7{,}9\ cm$. Neka je x dužina kraka jednakokrakog trougla. Tada je obim trougla: $7{,}9+2x=23{,}2$ pa je $x=7{,}65$. Dakle, dužina stranice je $7{,}9\ cm$, a kraka $7{,}65\ cm$.

671. Neka je a dužina prve, b druge i c treće daske. Tada je $a+b+c=14{,}5$. Neka je k dužina jednakih dijelova daske nakon rezanja, tada je $\frac{a}{2}=\frac{2b}{3}=\frac{3c}{4}=k$. Odavde slijedi $a=2k$, $b=\frac{3}{2}k$, $c=\frac{4}{3}k$, odnosno $2k+\frac{3}{2}k+\frac{4}{3}k=14{,}5$, pa je $k=3$. Dužine dasaka su $a=6\ m$, $b=4{,}5\ m$, $c=4\ m$.



Sl. 238

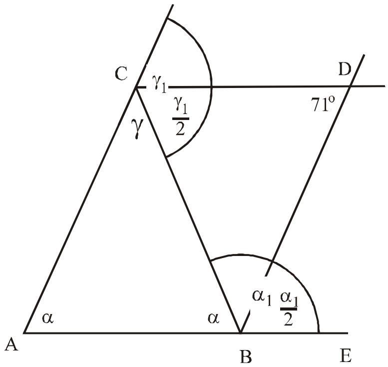
672. Neka je $\measuredangle CAB=\measuredangle CBA=\alpha$, $\measuredangle ACB=\gamma$, sl. 239, a tačka D presjek simetrale spoljašnjeg ugla α_1 kod tjemena B i simetrale spoljašnjeg ugla γ_1 kod tjemena C, E tačka na produžetku stranice AB preko tjemena B. Iz osobine spoljašnjeg ugla trougla slijedi da je $\gamma_1=2\alpha$ ili $\frac{\gamma_1}{2}=\alpha$, tj. $\measuredangle DCB=\measuredangle ABC$, pa je $CD\|AB$ i zaključujemo da je $\measuredangle EBD=\measuredangle CDB$ (uglovi uz transverzalu), tj. $\frac{\gamma_1}{2}=71^0$, pa je $\alpha_1=142^0$, a njegov uporedni ugao $\alpha=38^0$. Iz $\gamma+2\alpha=180^0$ je $\gamma=104^0$.

673. Rješenje jednačine je $x=\frac{2a-8}{a-3}$, $a\neq 3$. Ono će biti pozitivno ako su brojnik i nazivnik istog predznaka. Razlikujemo dva slučaja:
a) $2a-8>0$ i $a-3>0$. Odavde slijedi $a>4$ i $a>3$, odnosno $a>4$.
b) $2a-8<0$ i $a-3<0$. Odavde slijedi $a<4$ i $a<3$, odnosno $a<3$.
Zadana jednačina ima rješenja za svaki realan broj a, manji od 3 ili veći od 4.

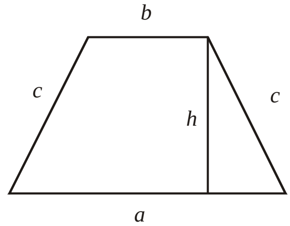
674. Neka traženi dvocifreni broj ima oblik $\overline{ab}$. Tada važi $10a+b+1=6(a+b)$, odnosno $4a+1=5b$. Odavde slijedi: $a=\frac{5b-1}{4}=\frac{4b+b-1}{4}=b+\frac{b-1}{4}$. Broj a je prirodan ako je $b-1=4k$, tj. $b=4k+1$. Tada je $a=5k+1$. Dakle, k može imati dvije vrijednosti $k=0$ ili $k=1$ (jer su a i b cifre). Za $k=0$ dobijamo: $a=1$ i $b=1$, a za $k=1$ je $a=6$ i $b=5$, pa su to jedina dva rješenja. Traženi brojevi: 11 i 65.

675. Neka je n broj stranica pravilnog mnogougla. Tada je broj njegovih dijagonala $\frac{(n-3)\cdot n}{2}=252$, tj. $(n-3)\cdot n=21\cdot 24$; $n=24$. Obim je $24\cdot 12=288\ cm$.

676. Prema Pitagorinoj teoremi i podacima na slici 240. važi: $h^2=c^2-\left(\frac{a-b}{2}\right)^2$; $h^2=23{,}04$; $h=4{,}8\ cm$. Površina trapeza: $P=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{6{,}8+4}{2}\cdot 4{,}8=25{,}92\ cm^2$.

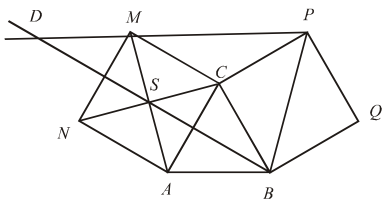


Sl. 239



Sl. 240

677. Neka je tačka S sjecište dijagonala kvadrata $ACMN$, a BP dijagonala kvadrata $BCPQ$, sl. 241. Očigledno je $\sphericalangle CBP = \sphericalangle CBP = 45^0$, jer je $\triangle BCP$ jednakokraki i pravougli. Trougao MCP je jednakokraki, $CM=CP$, a $\sphericalangle MCP = 360^0 - (2\cdot 90^0 + 60^0)$, tj. $\sphericalangle MCP = 120^0$, slijedi da je $\sphericalangle CMP = \sphericalangle CPM = 30^0$, a to znači da je $\sphericalangle BPD = 75^0$. Trougao ACS je jednakokraki, jer je $AS=CS$, a zbog $AB=CB$, zaključujemo da tačke B i S leže na simetrali stranice AC i da je $BS \perp AC$. Neka je tačka E presjek prave BS i prave AC. Trougao BEC je pravougli, jer je $\sphericalangle BEC = 90^0$, a zbog $\sphericalangle BCE = 60^O$, slijedi $\sphericalangle CBE = 30^0$, odnosno $\sphericalangle PBD = 75^0$. Kako je $\sphericalangle BPD = \sphericalangle PBD = 75^0$, zaključujemo da je $\triangle BPD$ jednakokraki.



Sl. 241

678. Razlomke proširimo, redom, sa $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ i $\sqrt{3+2\sqrt{2}}$ pa dalje računamo:

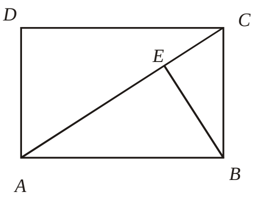
$$\frac{\sqrt{3+2\sqrt{2}}}{\sqrt{3-2\sqrt{2}}} - \frac{\sqrt{3-2\sqrt{2}}}{\sqrt{3+2\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{(3+2\sqrt{2})(3-2\sqrt{2})}}{3-2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})}}{3+2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{9-8}}{3-2\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{9-8}}{3+2\sqrt{2}} =$$
$$\frac{1}{3-2\sqrt{2}} - \frac{1}{3+2\sqrt{2}} = \frac{3+2\sqrt{2}-3+2\sqrt{2}}{(3-2\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})} = \frac{4\sqrt{2}}{9-8} = 4\sqrt{2}.$$

679. Brojnik i nazivnik datog razlomka rastavimo na faktore:

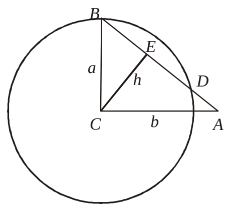
$$\frac{a^2-11a+24}{a^2-9a+8} = \frac{a(a-3)-8(a-3)}{a(a-1)-8(a-1)} = \frac{(a-3)(a-8)}{(a-1)(a-8)} = \frac{a-3}{a-1} = 1 - \frac{2}{a-1}.$$

Razlomak će biti cijeli broj ako je $\frac{2}{a-1}$ cijeli broj, a to je moguće samo ako je:
a) $a-1=1$; b) $a-1=-1$ c) $a-1=2$; d) $a-1=-2$, te je: $a=2$ ili $a=0$ ili $a=3$ ili $a=-1$.

680. Kako je $\triangle ABC$ pravougli, sl. 242, a zbog $AC=2BC$ slijedi da je $\triangle ABC$ polovina jednakostraničnog trougla, pa je $\sphericalangle BAC=30^0$ i $\sphericalangle BCA=60^0$, a to znači da je $\sphericalangle CBE=30^0$ i $\triangle BEC$ takođe polovina jednakostraničnog trougla, iz čega zaključujemo da je $BC=2CE$, tj. $BC=10\ cm$, a $AC=20\ cm$. Primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle ABC$ dobijamo $AB=10\sqrt{3}\ cm$. Traženi obim je $O=20(\sqrt{3}+1)\ cm$, a površina $P=100\sqrt{3}\ cm^2$.



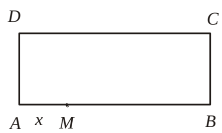
Sl. 242



Sl. 243

681. Površina kružnog prstena je $P=(r_1^2-r_2^2)\cdot\pi$, pa je $r_1^2-r_2^2=16$, odnosno $(r_1-r_2)(r_1+r_2)=161$, pa je $7\cdot(r_1+r_2)=161$, tj. $r_1+r_2=23$. Takođe važi i $r_1-r_2=7$. Rješavanjem sistema jednačina $r_1+r_2=23$; $r_1-r_2=7$ dobijamo $r_1=15\ cm$, $r_2=8\ cm$.

682. Neka je $BC=a$, $AC=b$ i neka je $CE=h$ dužina visine iz vrha C na hipotenuzu AB, odnosno osnovicu BD trougla BCD, sl. 243. Kako je $\triangle BCD$ jednakokraki, jer je $CB=CD$, slijedi $BE=DE=49\ cm$, pa je $AE=527+49=576\ cm$. Primjenom Pitagorine teoreme na trouglove BEC i AEC dobijamo $h^2=a^2-49^2$; $h^2=b^2-576^2$, odakle slijedi $b^2-576^2=a^2-49^2$, a zbog $c^2=625^2$ i $a^2=c^2-b^2$; $a^2=625^2-b^2$, je $b^2-576^2=625^2-b^2-49^2$, tj. $b^2=360000$ pa je $b=600\ cm$ i važi $a^2=625^2-600^2$; $a=175\ cm$.



Sl. 244

683. Neka je dati dvocifren broj $10x+y$.Trocifren broj koji nastaje stavljanjem nule između cifara ovog dvocifrenog broja imaće oblik: $100x+y$. Prema uslovima zadatka je $100x+y=9(10x+y)$, pa je $10x=8y$, tj. $y=\frac{3}{4}x$. Kako su x i y cifre, to slijedi: $x=4$, $y=5$. Dakle, 45 je dvocifreni, a 105 trocifreni broj.

684. Kako je, prema uslovima zadatka, $90^0-\alpha+180^0-\alpha=3\alpha$, to slijedi $\alpha=54^0$.

685. Desna strana jednakosti je paran broj pa i lijeva mora biti paran broj. Dakle, jedini paran prost broj je 2 pa je $p=2$, a $n=8$.

686. Neka je dužina duži $AM=x$, sl. 244. Prema zadatku je $BC=x+5$, a pošto je obim pravougaonika 50 cm važi: $2(x+3x+x+5)=50$, te je $x=4$ cm. Dalje računamo: $AB=16\ cm$, $BC=9\ cm$ i $P=144\ cm^2$.

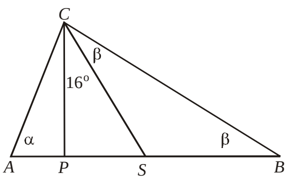
687. Ako je m ili n djeljivo sa 3, onda je $m\cdot n$ djeljivo sa 3. Ako nijedan od datih brojeva nije djeljiv sa 3, onda su oni oblika $m=3k+1$ ili $m=3k+2$, odnosno $n=3p+1$ ili $n=3p+2$, gdje su k i p cijeli brojevi. Ako imaju isti ostatak dijeljenja sa 3, onda je $m-n$ djeljivo sa 3. Ako imaju različite ostatke, onda je njihov zbir djeljiv sa 3.

688. Uočimo pravougli $\triangle CPS$. Prema oznakama na slici 245, važi $\sphericalangle ASC=2\beta$ (kao spoljašnji ugao $\triangle SBC$). Dakle, $\sphericalangle ASC=2\beta=90^0-16^0=74^0$, pa je $\beta=37^0$ i $\alpha=53^0$ (kao komplementni ugao ugla β).

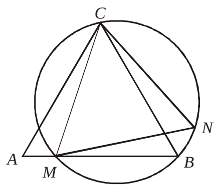
689. Neka je x cijena robe. Poslije povećanja za 37% nova cjena iznosi $1{,}37x$ i važi $1{,}37x : x = p : 100$, tj. $p\approx 73\%$. Novu cijenu treba smanjiti za 27%.

690. Označimo li sa $x=\overline{abcde}$. $x=\overline{abcde}$. Tada je $500000+x=4(10x+5)$. Rješenje jednačine je $x=12820$, pa je 512820 traženi šestocifreni broj i važi $512820 : 128205=4$.

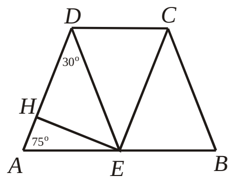
691. Iz $a^2+b^2=6ab$, dobijamo $a^2+2ab+b^2=8ab$, odnosno $(a+b)^2=8ab$ i $a^2-2ab+b^2=4ab$, odnosno $(a-b)^2=4ab$. Odavde je $\sqrt{(a+b)^2}=\sqrt{8ab}$; $|a+b|=\sqrt{8ab}$, pa je $a+b=\sqrt{8ab}$, jer je $a+b>0$. Slično, $|a-b|=\sqrt{8ab}$; $a+b=\sqrt{8ab}$, jer je $a-b>0$. Sada je $\frac{a+b}{a+b}=\frac{\sqrt{8ab}}{\sqrt{4ab}}=\sqrt{2}$.



Sl. 245



Sl. 246



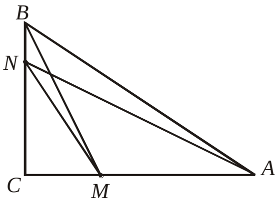
Sl. 247

692. Kako je $\sphericalangle CNM=60^0=\sphericalangle CBM$, zaključujemo da opisana kružnica $\triangle BCM$ sadrži i tačku N, sl. 246. Zbog toga je $\sphericalangle CBM=60^0=\sphericalangle CMN$ (ugao nad tetivom CN). Slijedi $\sphericalangle ACB=\sphericalangle NBC$. Ovi uglovi su naizmjenični u odnosu na pravu BC, te su AC i BN paralelne prave.

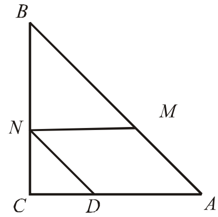
693. Neka je E središte veće osnovice AB trapeza $ABCD$, sl. 247. Prema uslovu zadatka je $AE=EB=CD$, pa su trouglovi AED, CDE i BEC podudarni, sa uglom od 30^0 pri vrhu. Površina $P_1=\frac{AD\cdot EH}{2}=\frac{AD}{2}\cdot\left(\frac{AD}{2}\right)$ ($\triangle EHD$ je pravougli sa oštrim uglovima od 30^0 i 60^0). Dakle, $P_1=\frac{1}{4}\cdot AD^2=25\ cm^2$.
Površina trapeza: $P=3P_1=75\ cm^2$.

694. Neka je dvocifreni broj oblika $\overline{ab}=10a+b$ $(a\neq 0)$. Zbog djeljivosti sa 3 je $a+b=3n$ (n je prirodan broj), slijedi $0<n\leq 6$. Prema drugom uslovu je $10a+b+27=10b+a$, pa je $b=a+3$. Iz dobijenih uslova dobijamo da je $2a=3(n-1)$, pa $n\in\{3,5\}$, i $\overline{ab}=36$ ili $\overline{ab}=69$.

695. Uočimo da je $\frac{a+b-x}{c}=\frac{a+b+c-x}{c}-1$, $\frac{a+c-x}{b}=\frac{a+b+c-x}{b}-1$, $\frac{b+c-x}{a}=\frac{a+b+c-x}{b}-1$, pa je data jednačina ekvivalentna sa $(a+b+c-x)\cdot\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}-\frac{4}{a+b+c}\right)=0$. Ako je $\frac{1}{c}+\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\neq\frac{4}{a+b+c}$, onda je $x=a+b+c$.



Sl. 248



Sl. 249

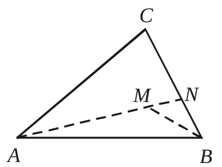
696. U pravouglom $\triangle ANC$ važi $AN^2=AC^2+CN^2$, a u pravouglom trouglu BMC je $BM^2=BC^2+CM^2$, sl. 248. Sabiranjem datih jednakosti imamo: $AN^2+BM^2=AC^2+CN^2+BC^2+CM^2=(AC^2+BC^2)+(CN^2+CM^2)=AB^2+MN^2$. (Primijenili smo Pitagorinu teoremu na trouglove ABC i MNC.)

697. Neka je u $\triangle ABC$ $\sphericalangle ACB=90^0$. Tada je $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=45^0$, sl. 249. Neka je tjeme A ujedno i tjeme romba. Tjeme romba na hipotenuzi AB označimo sa M, na kateti BC sa N, a na kateti AC sa D, slika. Iz paralelnosti pravih MN i AC slijedi $\sphericalangle MNB=90^0$, pa je $\sphericalangle NMB=\sphericalangle NBM=45^0$. Dakle, $\triangle NMB$ je jednakokraki pravougli. Stranica romba je $3(\sqrt{2}-1)cm$, a $\triangle NMB$ je polovina kvadrata te je $BM=MN\cdot\sqrt{2}=\sqrt{2}\cdot 3(\sqrt{2}-1)=6-3\sqrt{2}$, pa je $AB=AM+MB=3\cdot(\sqrt{2}-1)+(6-3\sqrt{2})=3$. Poluprečnik opisane kružnice jednak polovini hipotenuze te je R=1,5 cm.

698. $2^{20}-\sqrt{(1+2^{11}+2^{20})(1-2^{11}+2^{20})}=$
$2^{20}-\sqrt{(1+2\cdot 2^{10}+2^{20})(1-2\cdot 2^{10}+2^{20})}=$
$2^{20}-\sqrt{(1+2^{10})^2\cdot(1-2^{10})^2}=2^{20}-|1+2^{10}|\cdot|1-2^{10}|=$
$2^{20}-(1+2^{10})\cdot(2^{10}-1)=1$

699. Kako je $\frac{1}{(n-1)\cdot n}=\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}$, važi $\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{2\cdot 3}+\cdots+\frac{1}{48\cdot 49}+\frac{1}{49\cdot 50}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{48}-\frac{1}{49}+\frac{1}{49}-\frac{1}{50}=\frac{49}{50}$. Data jednačina je oblik: $\frac{49}{50}\cdot|x-5|=98$; tj. $|x-5|=100$. Odavde je x–5=100 ili x–5=–100, odnosno x=105 ili x=–95.

700. *a*) U $\triangle ACN$ važi $AC+CN>AN$, sl. 250. Dodavanjem NB lijevoj i desnoj strani nejednakosti dobijamo: $AC+CN+NB>AN+NB$, odosno $AC+CB>AN+NB$ (1). Iz $\triangle MNB$ dobijamo $MN+NB>MB$; Ako lijevoj i desnoj strani nejednakosti (2) dodamo AM, dobijamo: $AM+AN+NB>AM+$MB; $AN+NB>AM+MB$ (2). Iz (1) i (2) slijedi $AC+CB>AM+MB$. *b*) Kako je $\sphericalangle AMB>\sphericalangle ANB$ (spoljašnji ugao $\triangle BMN$) i $\sphericalangle ANB>\sphericalangle ACB$

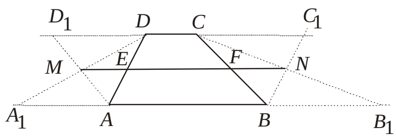


Sl. 250

(spoljašnji ugao $\triangle ACN$). Na osnovu tranzitivnosti relacije > dobijamo: $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ANB > \sphericalangle ACB$, pa je $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ACB$.

701. Razlomci su oblika $\frac{m}{n}$, gdje su m i n prirodni brojevi, za koje važi $1<n<9$ i $\frac{7}{9} < \frac{m}{n} < \frac{8}{9}$. Za $n \in \{2,3,4,...8\}$ dobijamo tražene razlomke. Prvo rješenje je za $n=5$. Tada je $\frac{7}{9} < \frac{m}{5} < \frac{8}{9}$. Svođenjem imenioca na NZS slijedi $\frac{35}{45} < \frac{9m}{45} < \frac{40}{45}$, odakle je $m=4$, pa je $a = \frac{4}{5}$, $b = \frac{5}{6}$, $c = \frac{6}{7}$, $d = \frac{7}{9}$.

702. Neka su AD_1, BC_1, CB_1, DA_1 simetrale spoljašnjih uglova trapeza $ABCD$, sl. 251. Kako se simetrale AD_1 i DA_1 sijeku pod uglom od 90^0 to je $\triangle AMD$ pravougli. Slično zaključujemo da je i $\triangle BNC$ pravougli. Jasno je da su tačke D i A_1 simetrične u odnosu na tačku M, pa je tačka M sredina duži DA_1. Takođe, zaključujemo da je tačka N sredina duži CB_1. Dakle, duž MN je srednja linija trapeza A_1B_1CD. Dakle, MN paralelna sa stranicama AB i CD trapeza $ABCD$. Kako M polovi DA_1, N polovi CB_1 to i tačka E polovi krak DA, a F polovi krak CB pa je EF srednja linija trapeza $ABCD$. Iz navedenog slijedi: ME je težišnica pravouglog $\triangle AMD$ i jednaka je polovini duži AD, a NF težišnica pravouglog $\triangle BNC$ i jednaka je polovini duži BC. Obim trapeza $ABCD$: $O=AB+BC+CD+DA$; $O=(AB+CD)+BC+DA$; $O=2EF+2FN+2ME$; $O=2(ME+EF+FN)$; $O=2\cdot 5521004{,}5$; $O=11042009\ cm$.



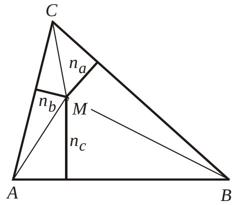
Sl. 251

703. Pretpostavimo da nema bar 10 učenka iz jednog grada, onda mora biti više od 9 gradova odakle dolaze učenici, Dakle ima najmanje 10 gradova. Ako iz bilo kojih 10 različitih gradova izaberemo po jednog učenika dobili smo 10 učenika iz 10 različitih gradova. Pretpostavimo suprotno, tj. da nema 10 učenika iz 10 različitih gradova. Tada gradova ima manje od 10, a to znači da ih ima najviše 9, odakle slijedi da u jednom od tih gradova mora biti više od 9 učenika tj. možemo iz tog grada izabrati 10 učenika.

704. Kako je $d_1+d_2=24$, odakle kvadriranjem dobijamo $d_1^2+2d_1\cdot d_2+d_2^2=576$, te je $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 + \frac{d_1\cdot d_2}{2} = 144$. Za dijagonale romba važi $\left(\frac{d_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{d_2}{2}\right)^2 = 81$, te je $\frac{d_1\cdot d_2}{2} = 63$. Dakle, površina romba je $63\ cm^2$.

705. Ako se cifre mogu ponavljati najmanji takakv broj je 10039999, a najveći 99994000. Prema uslovima zadatka, sve cifre su različite, a kako je zbir svih deset cifara 1+2+3+4+5+6+7+8+9+0=45, to znači iz zbira cifara osmocifrenog broja moramo izostaviti cifre čiji je zbir 5, jer je 45−40=5. Dakle, izostavljaju se cifre sabiraka zbirova 0+5, 1+4 ili 2+3. Da bi se dobio najmanji i najveći osmocifreni broj, izostavljamo cifre 2 i 3, pa se dobiju brojevi 10456789 i 98765410.

706. Kako je površina trougla: $P=\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{b\cdot h_b}{2}=\frac{c\cdot h_c}{2}=1$ (1), a prema zadatku i oznakama na sl. 252, dobijamo: $P=\frac{a\cdot n_a}{2}+\frac{b\cdot n_b}{2}+\frac{c\cdot n_c}{2}$ (2) Iz (1) i (2) slijedi: $\frac{a\cdot h_a}{2}=\frac{a\cdot n_a}{2}+\frac{b\cdot n_b}{2}+\frac{c\cdot n_c}{2}$. Množenjem ove jednakosti sa $\frac{2}{a\cdot h_a}$ dobijamo: $1=\frac{n_a}{h_a}+\frac{b\cdot n_b}{a\cdot h_a}+\frac{c\cdot n_c}{a\cdot h_a}$. Dalje, primjenjujući (1) dobijamo $\frac{n_a}{h_a}+\frac{b\cdot n_b}{a\cdot h_a}+\frac{c\cdot n_c}{a\cdot h_a}=1$, pa je $\frac{n_a}{h_a}+\frac{n_b}{h_a}+\frac{n_c}{h_a}=1$.



Sl. 252

707. Kako je $\sqrt{(3x-2)(x-2)-2x(x-2)}-\sqrt{2}=\sqrt{(x-2)(x-2)}-\sqrt{2}=|x-2|-\sqrt{2}$. Za $x=3-\sqrt{2}$ dobijamo:
$|3-\sqrt{2}-2|-\sqrt{2}=|1-\sqrt{2}|-\sqrt{2}=\sqrt{2}-1-\sqrt{2}=-1$.

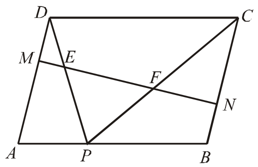
708. Transformišimo jednačinu: $\frac{2008^{2008}+2008^{2009}}{2009^{2009}}=x^{2008}$; $\frac{2008^{2008}+(1+2008)}{2009^{2009}}=x^{2008}$; $\frac{2008^{2008}\cdot 2009}{2009^{2009}}=x^{2008}$; $\left(\frac{2008}{2009}\right)^{2008}=x^{2008}$; $x=\frac{2008}{2009}$.

709. Paralelogram $ABCD$ i $\triangle DCP$ imaju jednaku visinu, koja odgovara stranici DC, sl. 253. Površina $\triangle DCP$ jednaka je polovini površine paralelograma $ABCD$. Stranica MN dijeli paralelogram $ABCD$ na dva četverougla ($DCNM$ i $ABNM$) jednakih površina, te je površina četverougla $DCNM$, takođe jednaka polovini površine paralelograma $ABCD$. Dakle, $\triangle DCP$ i četverougao $DCNM$ imaju jednake površine. Kako je četverougao $DCFE$ zajednički dio tih površina $\triangle DCP$ i četverougla $DCNM$, slijedi da je površina $\triangle EFP$ jednaka zbiru površina tro-uglova CNF i DME. Na sličan način posmatramo $\triangle DCP$ i četverougao $ABNM$, te zaključujemo da je površina četverougla $DCEF$ jednaka zbiru površina četverouglova $APEM$ i $PBNF$.

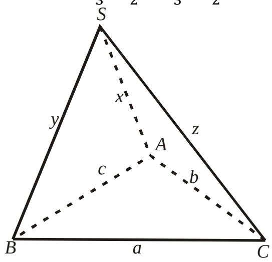
710. Jednačina $xy+3y-5x=18$ je ekvivalentna sa jednačinom $xy+3y-5x-15=3$, odnosno jednačinom $(x+3)(y-5)=3$. Kako je broj 3 prost broj, razlikuju se ove mogućnosti:
1) $x+3=1, y-5=3$, pa je $x=-2, y=8$; 2) $x+3=-1, y-5=-3$, pa je $x=-4, y=2$;
3) $x+3=3, y-5=1$, pa je $x=0, y=6$; 4) $x+3=-3, y-5=-1$, pa je $x=-6, y=4$.

711. Jasno je da su bočne strane piramide ABS, BCS, CAS pravougli trouglovi sa hipotenuzama, redom, c, a, b, Prema zadatku i oznakama sa sl. 254. je: $\frac{xy}{2}=54$, $\frac{xz}{2}=72$, $\frac{yz}{2}=96$, pa je $xy=108$, $xz=144$, $yz=192$. Važi: $xy\cdot xz=108\cdot 144$; $x^2\cdot yz=108\cdot 144$. Kako je $yz=192$, to je $x^2\cdot 192=108\cdot 144$, odnosno, $x^2=81$, pa je $x=9$ cm. Dalje, iz jednakosti $xy=108$, zbog $x=9$, slijedi $y=12$ cm. Slično, dobijamo

z=16 cm. Primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle SAC$ je: $a^2=z^2+y^2$, pa je a=20 cm. Iz jednakosti $b^2=x^2+z^2$ ($\triangle SAC$) slijedi $b=\sqrt{337}\ cm$. Dalje primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle SAB$ dobijamo $c^2=y^2+x^2$, tj. c=15 cm. Neka je osnova piramide $\triangle SAB$, tada je visina piramide ivica z, pa je: $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{xy}{2}=\frac{1}{3}\cdot\frac{108}{2}\cdot 16=288\ cm^2$.



Sl. 253



Sl. 254

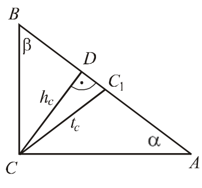
712. a) Kako je $19^2=361>91$, slijedi $19^{91}=(19^2)^{45}\cdot 19>(361)^{45}>91^{45}>91^{19}$, pa je i razlika $19^{91}-91^{19}>0$. b) Kako je $19^2=361$ i $91^2=8281$, to lako provjerimo da važi $19^2\equiv 1(\text{mod } 72)$ i $91^2\equiv 1(\text{mod } 72)$. Dalje iz $19^2\equiv 1(\text{mod } 72)$ slijedi $(19^2)^{45}\equiv 1^{45}(\text{mod } 72)$; $(19^2)^{45}\equiv 1(\text{mod } 72)$ te je $(19^2)^{45}\cdot 19\equiv 19(\text{mod } 72)$ (1). Slično dokazujemo: iz $91^2\equiv 1(\text{mod } 72)$ slijedi $(91^2)^9\equiv 1^9(\text{mod } 72)$, odnosno $(91^2)^9\equiv 1(\text{mod } 72)$ i najzad $(91^2)^9\cdot 91\equiv 91(\text{mod } 72)$ (2) Ako od (1) oduzmemo (2) dobijamo $(19^2)^{45}\cdot 19-(91^2)^9\cdot 91\equiv(19-91)(\text{mod } 72)$, odnosno $(19^2)^{45}\cdot 19-(91^2)^9\cdot 91\equiv -72(\text{mod } 72)$. Dakle M je djeljivo sa 72, što je i trebalo dokazati.

713. Koristeći nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine dobijamo: $x+1\geq 2\sqrt{x\cdot 1}\geq 2\sqrt{x}$, te je $y+1\geq 2\sqrt{y}$, $z+1\geq 2\sqrt{z}$. Množenjem ovih nejednakosti dobijamo: $(x+1)(y+1)(z+1)\geq 2\sqrt{x}\cdot 2\sqrt{y}\cdot 2\sqrt{z}=8\sqrt{xyz}=8$

714. Neka je m nepoznati petocifreni broj. Tada je $m=\overline{7abcd}=10\,000+n$, gdje je $n=\overline{7abcd}$. Prema uslovima zadatka važi m=17n, te je 7000+n=17n, odnosno n=4375, pa je m=74375.

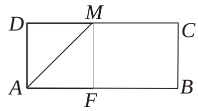
715.
$\frac{1}{3}<\frac{1-n}{5}<\frac{11}{12}\Leftrightarrow\frac{20}{60}<\frac{12-12n}{60}<\frac{11}{60}\Leftrightarrow 20<12-12n<55\Leftrightarrow 8<-12n<43\Leftrightarrow -43>12n>-8\Leftrightarrow 12n\in\{-36,-24,-12\}\Leftrightarrow n\in\{-3,-2,-1\}$.

716. Tačka C_1 polovi hipotenuzu, te je ona tjeme dva jednakokraka trougla, ACC_1 i BCC_1, sl. 255. Kako je $\alpha=90^0-\beta=90^0-52^0=38^0$ i $\sphericalangle CAC_1=\alpha=38^0$, to je $\sphericalangle CC_1D=2\alpha=76^0$, (spoljašnji ugao $\triangle ACC_1$). Uočimo $\triangle CDC_1$. Kako je $\sphericalangle CDC_1=90^0$, to je $\sphericalangle DCC_1=90^0-\sphericalangle CC_1D=90^0-76^0=14^0$.



Sl. 255

717. Prema uslovima zadatka, $ADMF$ je kvadrat, sl. 256. Neka je a stranica tog kvadrata. Kako je obim datog pravougaonika $70\ cm$, to važi $4a+2\cdot15=70$, pa je $a=10\ cm$. Dalje važi $AB=DC=DM+MC=10+15=25\ cm$. Površina pravougaonika $ABCD$ je $P_{ABCD}=AB\cdot AD=10\cdot25=250\ cm^2$.



Sl. 256

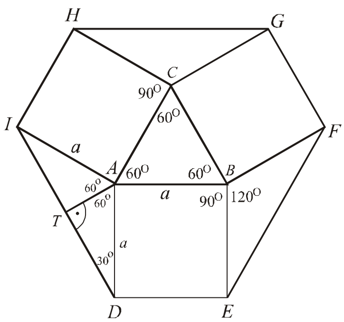
718. Neka je x broj jabuka koje je u početku imao brat (sestra). Tada je, prema uslovima zadatka, $(x+2k)-(x-2k)=12$, odakle dobijamo $k=3$. Brat je dao sestri 6 jabuka, pa je u početku imao ne manje od 6 jabuka.

719. Iz $5x^2=3k$ slijedi $x^2=\frac{3k}{5}$. Kako $k\in$N i $k<100$, to je $\frac{3k}{5}<\frac{3\cdot100}{5}=60$. Dakle, $x^2\leq 60$, tj. $x^2\in\{49, 36, 25, 16, 9, 4, 1\}$, jer $x\in$Z. Kako su od ovih brojeva 36 i 9 oblika $3k$, to je $x^2\in\{36, 9\}$, odnosno $x\in\{-6,-3,3,6\}$.

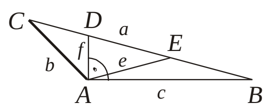
720. Kako je $210=2\cdot3\cdot5\cdot7$, to su četverocifreni brojevi kod kojih je 2 na mjestu cifre hiljada: 2357, 2375, 2537, 2573, 2735, 2753.

721. Prema uslovima zadatka i oznaka na sl. 257. zaključujemo da je površina šestougla jednaka je zbiru površina tri kvadrata stranice a, jednog jednakostraničnog trougla stranice a i tri jednakokraka trougla, pri čemu je površina svakog od njih jednaka površini jednakostraničnog trougla . Dakle važi: $P=3a^2+4\cdot\frac{a^2\cdot\sqrt{3}}{4}=a^2(3+\sqrt{3})$. Kako je $ID=2\cdot\frac{AD\cdot\sqrt{3}}{2}=a\sqrt{3}$, to je obim šestougla $O=3a+3\cdot a\sqrt{3}=3a(1+\sqrt{3})$.

722. U pravouglom $\triangle BAD$, sl. 258, konstruišimo težišnu liniju AE. Tada važi: $AE=BE=DE$ i zaključujemo da je $\triangle$ABE je jednakokraki, pa je $\sphericalangle BAE=15^{\circ}$. Takođe važi $\sphericalangle AEC=30^{\circ}$ (spoljašnji ugao $\triangle ABE$). Dakle, i $\triangle AEC$ je jednako-kraki, te važi $AE=AC$. Konačno je $BD=$BE+DE=AE+AE=2$\cdot$AE=2$\cdot AC$.

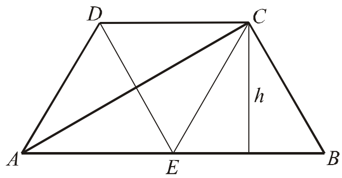


Sl. 257



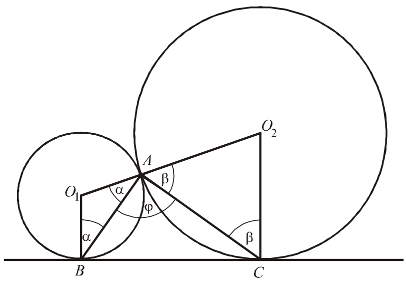
Sl. 258

723. Prema zadatku pravougli $\triangle ABC$ ima oštre uglove 30^0 i 60^0, pa je $\sphericalangle ABC = \sphericalangle BAD = 60^0$ i zaključujemo da je dati trapez jednakokraki, sl. 259. Neka tačka E polovi katetu AB $\triangle ABC$. Kako je CE težišna duž $\triangle ABC$, to je $CE=EB$. Iz $\sphericalangle ABC=60^0$, slijedi da je $\triangle CEB$ jednakostraničan. Dalje, možemo zaključiti da su i trouglovi AED i DCE, takođe jednakostranični i važi $AED \cong DCE \cong CEB$. Kako je obim trapeza 2 cm, to je stranica svakog trougla $a=0,4$ cm, tj. osnovice trapeza su $AB=0,8$ cm i $CD=0,4$ cm. Visina trapeza je visina jednakostraničnog trougla: $h=0,2\sqrt{3}\ cm$. Površina trapeza: $P=\frac{AB+CD}{2}\cdot h=\frac{0,8+0,4}{2}\cdot 0,2\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{5}\ cm^2$.

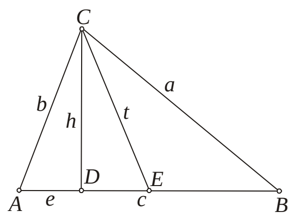


Sl. 259

724. $\triangle ABO_1$ je jednakokraki ($AO_1=BO_1$), pa je $\sphericalangle O_1AB=\sphericalangle ABO_1=\alpha$, sl. 260. Slično zaključujemo: $\sphericalangle O_2AC=\sphericalangle ACO_2=\beta$. Prema uslovima zadatka važi: $\sphericalangle ABC=90^0-\alpha$ i $\sphericalangle ACB=90^0-\beta$. Neka je $\sphericalangle BAC=\varphi$, tada za uglove $\triangle ABC$ važi: $\varphi+(90^0-\alpha)+(90^0-\beta)=180^0$, tj. $\varphi=\alpha+\beta$. Kako je $\sphericalangle O_1AO_2=180^0$, tj. $\varphi+\alpha+\beta=180^0$, to je $\varphi=90^0$.



Sl. 260



Sl. 261

725. Neka je $h=CD$ (visina), $e=AD$ i $t=CE$ (težišna duž). Primijenimo Pitagorinu teoremu, redom, na trouglove ADC i BDC (sl. 261): $h^2=b^2-e^2$; $h^2=a^2-(c-e)^2$, Odavde je $b^2-e^2=a^2-(c-e)^2$ pa je $e=\frac{b^2+c^2-a^2}{2c}=\frac{13^2+14^2-15^2}{2\cdot 14}=5\ cm$.
Dakle, $DE=\frac{c}{2}-e=\frac{14}{2}-5=5\ cm$.

726. $\frac{\sqrt{225}\cdot\sqrt{2,25}}{\sqrt{0,225}\cdot\sqrt{2,25}}=\frac{\sqrt{225}\cdot\sqrt{\frac{225}{10}}}{\sqrt{\frac{2,25}{10}}\cdot\sqrt{2,25}}=\frac{\sqrt{\frac{225^2}{10}}}{\sqrt{\frac{2,25^2}{10}}}=\frac{225}{2,25}=100.$

727. $x^2+y^2+4x-16y+68=0$; $x^2+4x+4+y^2-16y+64=0$; $(x+2)^2+(y-8)^2=0$. Iz posljednje jednakosti slijedi $x=-2$, $y=8$.

728. Ako od sto proizvoljnih cijelih brojeva formiramo 7 klasa, tako da u prvoj klasi budu brojevi djeljivi sa 7, u drugoj brojevi koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 1, u trećoj brojevi čiji je ostatak 2 pri dijeljenju sa 7 i tako do poslednje klase u kojoj su brojevi koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 6. Tada je u svakoj klasi razlika bilo koja dva broja djeljiva sa 7. Ako bi u svakoj klasi bilo najviše 14 brojeva onda bi na taj način rasporedili najviše 98 brojeva, jer je $7 \cdot 14 = 98$. Kako je prema uslovima zadatka ukupno 100 brojeva, to još dva različita cijela broja pripadaju nekoj od klasa. Dakle, postoji klasa u kojoj bi bilo 15 ili više brojeva, a čija je razlika djeljiva sa 7.

729. Kako je $180 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$, to su cifre četverocifrenog broja :
a) 1, 4, 5, 9; b) 1, 5, 6, 6; c) 2, 2, 5, 9; d) 2, 3, 5, 6; e) 3, 3, 4,5.
Da bi broj bio djeljiv sa 9, njegov zbir cifara takođe mora biti djeljiv sa 9. Zato slučajevi a), d) i e) otpadaju, a ostaju b) i c). Najmanji četverocifren broj koji se u tim slučajevima može formirati je 1566.

730. Kako je zbir spoljašnjih uglova trougla 360^{0}, a zbir dva spoljašnja ugla iznosi 270^{0} to je treći spoljašnji ugao 90^{0}. Kako je njegov suplementni unutrašnji ugao takođe 90^{0}, to je $\triangle ABC$ pravougli.

731. Transformišimo datu jednakost: $\frac{4}{y} = 2010 - x$. Kako je x prirodan broj, to je broj $2010 - x$ prirodan, pa je zbog toga i $\frac{4}{y}$ prirodan broj. Dakle, y mora biti djelilac broja 4, pa $y \in \{1,2,4\}$; odakle slijedi $x \in \{2006, 2008, 2009\}$. Rješenja su uređeni parovi: $(2006, 1)$; $(2008, 2)$; $(2009, 4)$.

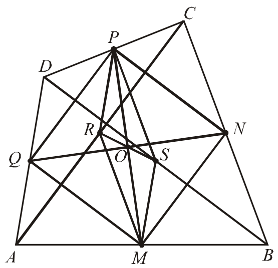
732. Označimo sa x ukupnu količinu žita prodanog za sva četiri dana. Prema uslovima zadatka je: $\frac{x}{3} \cdot + \frac{x}{6} + 5 \cdot \left(\frac{x}{3} - 90\right) + \frac{x}{3} - 90 = x$, pa poslije sređivanja dobijamo: $\frac{5x}{3} - 540 = x$, te je $x = 360$ tona.

733. Transformišimo dati uslov: $a^2 + d^2 - 2ab - 2bc - 2cd + 2b^2 + 2c^2 = a^2 - 2ab + b^2 - 2bc + c^2 - 2cd + d^2 = (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-d)^2 = 0$. Kako je zbir tri nenegativna broja jednak nuli, to je svaki od njih jednak nuli. Dakle, $a-b=0$, $b-c=0$, $c-d=0$, odnosno $a=b$, $b=c$, $c=d$, tj. $a=b=c=d$.

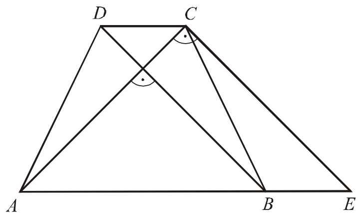
734. Uočimo trouglove ABC i ACD, sl. 262. U $\triangle ABC$ je duž MN je srednja linija trougla, pa je ona paralelna sa stranicom AC i jednaka njenoj polovini. Takođe, u $\triangle ACD$ duž PQ je je srednja linija trougla, pa je paralelna sa stranicom AC i jednaka njenoj polovini. Dakle, duž MN i PQ su paralelne i jednake među sobom, pa je četverougao $MNPQ$ paralelogam i njegove dijagonale MP i NQ se polove u tački O. Dokazaćemo da prava RS sadrži središte O duži MP i NQ. Slično, kao u prethodnom slučaju, za trouglove ABD i ACD, dokazujemo da su duži MS i PR paralelne i jednake među sobom, pa je četverougao $MSPR$ paralelogram i njegove dijagonale MP i RS se polove. Dakle, tačka O je zajedničko središte duži MP, NQ i RS, odakle proizilazi da se prave MP, NQ i RS sijeku u jednoj tački, što je i trebalo dokazati.

735. Neka je $ABCD$ dati trapez, sl. 263. Na produžetku duži AB odredimo tačku E, tako da je $BE=CD$. Četverougao $BECD$ je paralelogram, pa je duž CE paralelna i jednaka BD i trouglovi BCE i BCD su podudarni. Trouglovi BCD i ACD imaju zajedničku stranicu CD, kao i visinu na tu stranicu, pa su im površine jednake. Dakle, površina trapeza $ABCD$ jednaka je površini $\triangle ACE$, mogu se razložiti na zajednički dio, $\triangle ABC$ i podudarne trouglove ACD i BCE. Kako je $\triangle ACE$ pravougli, sa katetama AC i CE dužine $5\ cm$, to je površina trapeza $P=12{,}5\ cm^2$.

736. Vidi rješenje zadatka **11**.



Sl. 262



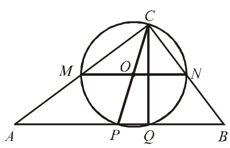
Sl. 263

737. Neka je A jedan od ovih učenika. Od ostalih 5 učenika postoje najmanje 3 koji se poznaju sa A, ili postoje najmanje 3 koji se ne poznaju sa A.
1. Slučaj: Pretpostavimo da su to 3 poznanika učenika A. Ako se među ovom trojicom nalaze 2 koji se poznaju među sobom, onda oni zajedno sa A čine trojku poznanika. U protivnom među ovom trojicom svaki ne poznaje ni jednog od preostala dva učenika.
2. Slučaj: Slično zaključujemo ako se ova trojica ne poz-naju sa učenikom A.

738. Pretpostavimo da su dužine obje katete neparni brojevi. Neka je $a=2m+1$ i $b=2n+1$, gdje su m i n prirodni brojevi. Tada, prema Pitagorinoj teoremi, važi: $c^2=a^2+b^2=(2m+1)^2+(2n+1)^2=4(m^2+m+n^2+n)+2$, tj. c^2 bi bilo djeljivo sa 2, ali ne i sa 4. Ako je c^2 djeljivo sa 2, tada je c djeljivo sa 2, pa je c^2 djeljivo sa 4, što je u suprotnosti sa zaključkom da c^2 nije djeljivo sa 4. Dakle, pretpostavka da su dužine obje katete neparni brojevi nije tačna.

739. Neka su cijena tašne, olovke i knjige redom x, y i z. Tada iz uslova zadatka važi: $\frac{x}{5}+\frac{y}{2}+\frac{z}{2{,}5}=160$ i $\frac{x}{2}+\frac{y}{4}+\frac{z}{3}=240$. Ako se oslobodimo razlomaka, slijedi $2x+5y+4z=1600$ i $6x+3y+4z=2880$. Saberimo ovie jednačine: $8x+8y+8z=4480$; $x+y+z=560$. Dakle, učenik je za kupovinu potrošio 560 KM.

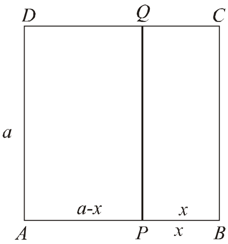
740. Dužina hipotenuzu AB, pravouglog $\triangle ABC$ je $100\ cm$, pa je, prema uslovima zadatka $MN=50\ cm$ (srednja linija trougla), sl. 264. Data kružnica sadrži tjeme C pravog ugla, jer je ugao nad prečnikom prav. Tačka koja je simetrična sa C u odnosu na pravu MN pripada hipotenuzi, i kako je kružnica simetrična u



Sl. 264

odnosu na svoj prečnik MN, to ova tačka pripada kružnici. Zapravo, to je jedna od presječnih tačaka kružnice i hipotenuze, recimo da je to tačka Q. Duž CQ je normalna na duž MN, a samim tim i na stranicu AB, pa je $\sphericalangle CQP$ prav. Odavde slijedi da je duž CQ prečnik kružnice, te je CQ=50 cm. Kako je površina trougla ABC: $P=\frac{AC\cdot BC}{2}=\frac{80\cdot 60}{2}=2400\ cm^2$ i $\frac{AB\cdot CQ}{2}=2400\ cm^2$, to iz ovih jednakosti dobijamo CQ=48 cm. Primijenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle CQP$:
$PQ^2=CP^2-CQ^2=50^2-48^2=196$; $PQ=14\ cm$.

741. Neka je $ABCD$ dati kvadrat, stranice a, koji je sa duži PQ podijeljen na pravougaonike $APQD$ i $PBCQ$, i neka je $PB=x$, sl. 265. Tada je $AP=a-x$. Ako sa s_1 i s_2 označimo redom obime pravougaonika $APQD$ i $PBCQ$, tada je $s_1-s_2=2(a-x+a)-2(x+a)=2(a-2x)$. Kako je $s_1-s_2=594$, to je $a-2x=594$. Prema uslovima zadatka je $a=503\ cm$, pa je $x=103\ cm$, a $a-x=400\ cm$.



Sl. 265

742. Kako je
$$12=12\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdot\dots\cdot1}_{2010}=4\cdot3\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdot\dots\cdot1}_{2010}=2\cdot2\cdot3\cdot\underbrace{1\cdot1\cdot1\cdot\dots\cdot1}_{2010},$$
to dati proizvod sadrži:

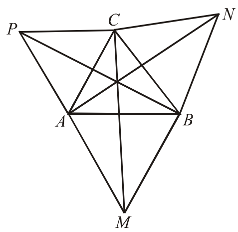
a) najmanje jedan parni cijeli broj; c) najmanje 0 negativnih cijelih brojeva;
b) najviše 2 parna cijela broja; d) najviše 2010 negativnih cijelih brojeva.

743. Ako je $2p+3q=200$, onda je $3q=200-2p$, pa je desna strana jednakosti paran broj, što znači da i $3q$ mora biti paran broj, te je $q=2$, pa je $2p=200-6=194$. Kako je $p=97$ prost broj, to je $p=97$, $q=2$ jedino rješenje.

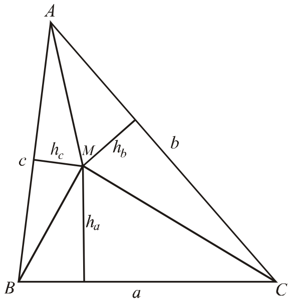
744. Uočimo troglove ABN i BCM, sl. 266. Kako je $BN=BC$, $\sphericalangle ABN=\sphericalangle ABC+60^O$ i $\sphericalangle MBC=60^0+\sphericalangle ABC$, pa je $\sphericalangle ABN=\sphericalangle MBC$. Dakle, $\triangle ABN\cong\triangle BCM$ i slijedi $AN=CM$. Slično se iz podudarnosti $\triangle ACN\cong\triangle BCP$ dokazuje $AN=BP$. Dakle, $AN=BP=CM$.

745. Neka su a, b, c dužine stranica trougla ABC; h_a, h_b, h_c dužine normala iz M na stranice trougla, sl. 267. Tada je $ah_a+bh_b+ch_c=2P$, gdje je P površina $\triangle ABC$. Zbir $ah_a+bh_b+ch_c$ je, za dati trougao i tačku M, konstantan, pa proizvod $ah_a\cdot bh_b\cdot ch_c$ ima najveću vrijednost za $ah_a=bh_b=ch_c$. Kako je $ah_a\cdot bh_b\cdot ch_c=(abc)\cdot(h_ah_bh_c)$, gdje je proizvod abc konstantan, to proizvod ima najveću vrijednost kad je proizvod $h_a\cdot h_b\cdot h_c$ najveći. On je najveći, kad tačka M određuje međusobno jednake površine trouglova MB, AMC, BMC. To se postiže, kad je tačka M težište trougla.

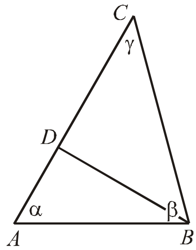
746. Kako je $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{a^2+b^2}{a^2b^2}=\frac{c^2}{a^2b^2}$ i $P=\frac{ab}{2}=\frac{ch}{2}$, tj. $ab=ch$, pa je $\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}=\frac{c^2}{c^2h^2}=\frac{1}{h^2}$.



Sl. 266



Sl. 267



Sl. 268

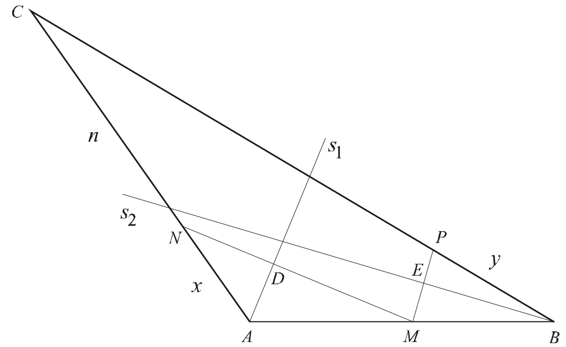
747. Visina BD dijeli $\triangle ABC$ na dva trougla, sl. 268. Prema zadatku $\triangle ABD$ je polovina jednakostraničnog trougla, a $\triangle BCD$ je jednakokraki pravougli i važi: $AB=6\ cm$, $AD=3\ cm$ i $BD=3\sqrt{3}\ cm$. Kako je $BD=3\sqrt{3}\ cm$ i $CD=BD$, to je $AC=\left(3+3\sqrt{3}\right)cm$. Površina: $P_{ABC}=\frac{AC\cdot BD}{2}=\frac{\left(3+3\sqrt{3}\right)\cdot 3\sqrt{3}}{2}=\frac{9\cdot(\sqrt{3}+3)}{2}\ cm^2$.

748. Pretpostavimo da je: $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=0$. Tada je :

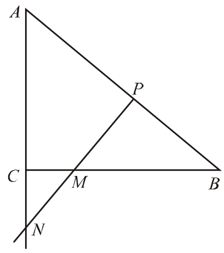
$a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)=0;$
$a^2c-a^2b+b^2a-b^2c+c^2b-c^2a=0;$
$a^2c-c^2a+b^2a-b^2c+c^2b-a^2b=0;$
$ac(a-c)+b^2(a-c)-b(a^2-c^2)=0;$
$(a-c)(ac+b^2-b(a+c))=0;$
$(a-c)(ac+b^2-ab-bc)=0;$
$(a-c)(ac-bc+b^2-ab)=0;$
$(a-c)[c(a-b)-b(a-b)]=0;$
$(a-c)(a-b)(c-b)=0.$

Iz posljednje jednakosti slijedi: $a-c=0$ ili $a-b=0$ ili $c-b=0$, odnosno $a=c$ ili $a=b$ ili $c=b$ što je suprotno pretpostavci da su a, b i c međusobno različiti brojevi. Dakle, uz date uslove, izraz $a^2(c-b)+b^2(a-c)+c^2(b-a)$ ne može biti jednak nuli.

749. Prema uslovima zadatka i oznakama na sl. 269. važi: $\sphericalangle MAD=\sphericalangle NAD=\sphericalangle ADM=\sphericalangle ADN=90^0$ i AD je zajednička stranica $\triangle AMD$ i $\triangle AND$, pa je $\triangle ADM\cong\triangle ADN$, te je $AM=AN$. Slično zaključujemo $\triangle BEM\cong\triangle BEP$, odakle slijedi $BM=BP$. Neka je $x=AN$, $y=BP$, $n=CN$. Tada je, prema uslovu zadatka, $CP=2\cdot CN=2n$, $AC=AN+NC=x+n$, $BC=BP+PC=y+2n$. Kako je $x+n=10y+2n=16$, slijedi da je $x=10-n$, $y=16-2n$. Takođe važi $AB=AM+MB=AN+BP=x+y$, te je $x+y=8$, odnosno $(10-n)+(16-2n)=8$. Rješavanjem ove jednačine dobijamo $n=6$, pa je $x=4$, $y=4$. Najzad, $AM:MB=AN:BP=x:y=4:4=1:1$.



Sl. 269



Sl. 270

750. Prema uslovima zadatka, postoje prirodni brojevi a i b, tako da je $p=a^2-b^2$, tj. $p=(a-b)(a+b)$. Kako je p prost broj, slijedi da jeprethodna jednakost je moguća samo za $a+b=p$ i $a-b=1$. Odatle se dobija $a=\frac{p+1}{2}$, $b=\frac{p-1}{2}$. Kako je $p>2$, to su $\frac{p+1}{2}$ i $\frac{p-1}{2}$ prirodni brojevi za koje važi: $p=\left(\frac{p+1}{2}\right)^2-\left(\frac{p-1}{2}\right)^2$. Dakle, prost broj p se može predstaviti kao razlika kvadrata dva prirodna broja, na jedinstven način:

751. Iz nejednakosti $x+y\geq 2\sqrt{xy}$, slijedi $\frac{1}{x+y}\leq\frac{1}{2\sqrt{xy}}$. Tada je: $\frac{b+c}{a^2+bc}=\frac{\frac{1}{a^2+bc}}{\frac{1}{b+c}}\leq\frac{\frac{1}{2a\sqrt{bc}}}{\frac{1}{2\sqrt{bc}}}=\frac{2\sqrt{bc}}{2a\sqrt{bc}}=\frac{1}{a}$, odnosno $\frac{c+a}{c^2+ca}\leq\frac{1}{b}$ i $\frac{a+b}{c^2+ab}\leq\frac{1}{c}$. Dalje računamo: $\frac{b+c}{a^2+bc}+\frac{c+a}{c^2+ca}+\frac{a+b}{c^2+ab}\leq\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, što je i trebalo dokazati.

752. Neka je $a=\sqrt{x}$. Tada je $a>1$, a prema uslovima zadatka je $a^2-\frac{1}{a^2}=a+\frac{1}{a}$; $\left(a-\frac{1}{a}\right)\cdot\left(a+\frac{1}{a}\right)=a+\frac{1}{a}$. Ovu jednakost podijelimo sa $a+\frac{1}{a}$ jer je $a+\frac{1}{a}>0$. Dakle $a-\frac{1}{a}=1$. Kvadriranjem ove jednakosti slijedi: $a^2+\frac{1}{a^2}=3$. Dalje slijedi, zbog $a=\sqrt{x}$, $x+\frac{1}{x}=3$.

753. Neka je $3^{2009}=x$ Tada važi: $A=\frac{x+1}{3x+1}$; $B=\frac{3x+1}{9x+1}$; $x>0$, pa je $A:B=\frac{x+1}{3x+1}:\frac{3x+1}{9x+1}=\frac{(x+1)(9x+1)}{(3x+1)(3x+1)}=\frac{9x^2+10x+1}{9x^2+6x+1}>1$. Dakle $A>B$.

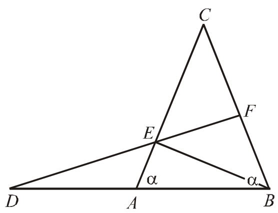
754. Oštri uglovi BMP i BAC, odnosno MBP i ANP imaju međusobno normalne krake, sl. 270, i važi $\sphericalangle BMP=\sphericalangle CMN=\alpha$, odnosno $\sphericalangle PNA=\sphericalangle MBP$. Pravougli trouglovi BPM i NPA imaju jednake oštre uglove pa su slični i važi $\frac{c}{2}:m=n:\frac{c}{2}$, tj. $c=2\sqrt{mn}$. Kako je PM pravougli, to važi: $BM=\sqrt{\frac{c^2}{4}+m^2}=\sqrt{\frac{4mn}{4}+m^2}=\sqrt{mn+m^2}$. Trouglovi BMP i BAC su slični pa je $m:BM=b:c$, odnosno, zbog $BM=\sqrt{mn+m^2}$ i $c=2\sqrt{mn}$, $m:\sqrt{mn+m^2}=b:2$; $b=\frac{2m\sqrt{mn}}{\sqrt{mn+m^2}}$. Slično određujemo stranicu a. Kako je $\triangle BMP \sim \triangle NCM$ slijedi $m:BM=(a-BM):(n-m)$. Kako je $BM=\sqrt{mn+m^2}$, to poslije sređivanja dobijamo $b=\frac{2mn}{\sqrt{mn+m^2}}$.

755. Da bi proizvod brojeva $\overline{31a}$ i $\overline{62b1}$ bio djeljiv sa 15 mora bar jedan od njih biti djeljiv sa 5 i bar jedan od njih djeljiv sa 3. Broj $\overline{62b1}$ nije djeljiv sa 5, pa posljednja cifra broja $\overline{31a}$ mora biti 0 ili 5. Ako je $a=5$, onda je broj 315 djeljiv sa 15, pa cifra b može biti bilo koja cifra, tj. drugi broj može biti 6201, 6211, 6221, 6231, 6241, 6251, 6261, 6271, 6281, 6291. Ako je $a=0$, onda je prvi broj 310 i nije djeljiv sa 3, pa to mora biti drugi broj. Dakle, cifra b može biti 0, 3, 6, 9, pa drugi broj može biti 6201, 6231, 6261, 6291.

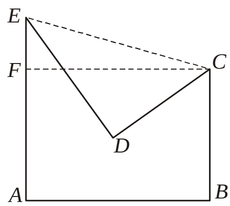
756. Neka je traženi broj $\overline{abcd}$. Tada je $d=4$, jer pri dijeljenju sa 10 ostatak je 4. Zbog djeljivosti sa 4 je $c\in\{0, 2, 4, 6, 8\}$. Takođe, prema uslovima zadatka, $a=3b$. Tada je $a+b+c+4=4b+c+4$. Da bi broj bio djeljiv sa 9, mora biti $4b+c=5$ ili $4b+c=14$. Kako $c\in\{0, 2, 4, 6, 8\}$, direktnim provjeravanjem dobijamo da ne važi jednakost $4b+c=5$, a iz jednakosti $4b+c=14$ slijedi da je $b=3$, $a=9$ i $c=2$, ili $b=2$, $a=6$ i $c=6$. Dakle, traženi brojevi su 9324 i 6264.

757. Neka su stranice pravougaonika a i b. Tada je, prema uslovima zadatka,
$2a+2b=ab$; $ab-2a=2b$; $a(b-2)=2b$; $a=\frac{2b}{b-2}=\frac{4+2(b-2)}{b-2}=2+\frac{4}{b-2}$.
Kako su a i b prirodni brojevi to važi $b\in\{3, 4, 6\}$ i stranice pravougaonika su 3 i 6, odnosno 4 i 4 (kvadrat).

758. Ako trećem radniku treba x dana da sam uradi posao, onda sva trojica radeći zajedno dnevno obave $\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{x}$ posla. Za 7,5 dana obave cijeli posao, pa je $7{,}5\cdot\left(\frac{1}{15}+\frac{1}{18}+\frac{1}{x}\right)=1$. Rješavanjem ove jednačine dobijamo $x=90$.



Sl. 271



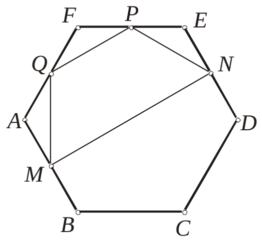
Sl. 272

759. Neka je $\measuredangle CAB=\alpha$, sl. 271. Tada za pravougli $\triangle AEB$ važi: $\measuredangle ABE=90^0-\alpha$, pa je i $\measuredangle EDB=90^0-\alpha$. Neka je F presjek prvih DE i BC. Za $\triangle FDB$ važi: $\measuredangle DFB=180^0-\measuredangle FDB-\measuredangle DBF=180^0-(90^0-\alpha)-\alpha=90^0$. Dakle, $DF\perp BF$, odnosno $DE\perp BC$.

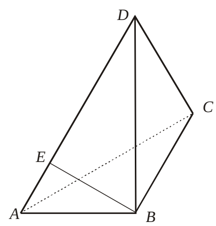
760. Primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle EDC$, sl. 272, dobijamo $EC=10\ cm$. Neka je tačka F pripada stranici AE tako da je $BC=AF$. Tada je četverougao $ABCF$ pravougaonik, a $\triangle CFE$ je pravougli i važi $EF=AE-AF=6\ cm$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle CFE$: $CF^2=EC^2-FE^2=10^2-6^2=64$, pa je $CF=8\ cm$. Obim mnogougla: $O_{ABCDE}=8+7+6+8+13=42\ cm$.

761. Kako je $a=m^2+n^2$, $b=2mn$, $c=m^2-n^2$, to sabiranjem prve i treće jednakosti dobijamo $a+c=2m^2$, a oduzimanjem treće jednakost od prve dobivamo $a-c=2n^2$. Množeći posljednje dvije jednakosti imamo $(a+c)(a-c)=4m^2n^2$, tj. $a^2-c^2=4m^2n^2$. Kako iz $b=2mn$ slijedi $b^2=4m^2n^2$, to je $a^2-c^2=b^2$; $a^2=b^2+c^2$.

762. Označimo stranicu šestougla $ABCDEF$ sa a, sl. 273. Površina četverougla $MNPQ$ jednaka je polovini površine pravilnog šestougla čija su tjemena središta stranica šestougla $ABCDEF$. Neka je b stranica tog šestougla. Tada je $b=QP=\frac{AE}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{2}$, jer QP je srednja linija $\triangle AEF$. Kako je $P_{ABCDEF}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}$ i $P_{MNPQ}=\frac{3b^2\sqrt{3}}{4}=$, to je $P_{ABCDEF}:P_{MNPQ}=\frac{3a^2\sqrt{3}}{2}:\frac{3b^2\sqrt{3}}{4}=\frac{2a^2}{b^2}=\frac{2a^2}{\left(\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{8}{3}$.



Sl. 273



Sl. 274

763. Važi: $5^3<2^7$; $(5^3)^{287}<(2^7)^{287}$; $5^{861}<2^{2009}<2^{2010}$, pa slijedi $2^{2010}<5^{861}$.

764. Neka su a, b, c stranice kvadra. Tada važi $ab:bc:ca=2:3:5$, tj $\frac{ab}{2}=\frac{bc}{3}=\frac{ca}{5}$. Odavde slijedi $\frac{a}{2}=\frac{c}{3}$ i $\frac{b}{3}=\frac{a}{5}$, odnosno $\frac{a}{10}=\frac{c}{15}$ i $\frac{b}{6}=\frac{a}{10}$, pa je $\frac{a}{10}=\frac{b}{6}=\frac{c}{15}$; tj. $a:b:c=10:6:15$.

765. Tjemena osnove piramide obilježimo sa A, B i C, a vrh sa D. Neka je tačka E podnožje visine iz tjemena B bočne strane $\triangle ABD$, sl. 274. Trougao EBD je pravougli sa oštrim uglovima od 30^0 i 60^0 i važi $ED=4\sqrt{3}\,cm$, pa je površina bočne strane piramide $P=16\ cm^2$. Kako je $AE=AD-ED=8-4\sqrt{3}$, primjenom Pitagorine teoreme na $\triangle$AEB dobijamo $AB^2=AE^2+EB^2=(8-4\sqrt{3})^2+4^2$, odnosno $AB=8\sqrt{2-\sqrt{3}}\,cm$. Površina osnove piramide:

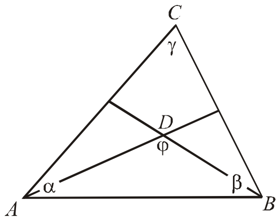
$B=\frac{\left(8\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2\cdot\sqrt{3}}{4}=16\left(2\sqrt{3}-3\right)cm^2$, a površina piramide:

$P_P=B+3P=16\left(2\sqrt{3}-3\right)+3\cdot16=32\sqrt{3}\,cm^2$.

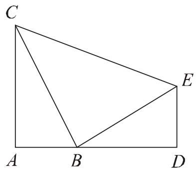
766. Neka je $A=1^2+2^2+3^2+...+2010^2$ i $B=1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+...+2009\cdot2011$. Kako je $B=1\cdot3+2\cdot4+3\cdot5+...+2009\cdot2011=(2-1)\cdot(2+1)+(3-1)\cdot(3+1)+...+(2010-1)\cdot(2010+1)=2^2-1+3^2-1+...+2010^2-1=(2^2+3^2+...+2010^2)-2009=1^2+2^2+3^2+...+2010^2-2010$, slijedi da je $A-B=2010$.

767. Neka su a i $a+1$ dva uzastopna prirodna broja, pri čemu je $a+1=n^2$. Tada je $a=n^2-1=(n-1)\cdot(n+1)$. Proizvod je $a(a+1)=(n-1)\cdot(n+1)n^2$. Kako su $n-1$, n i $n+1$

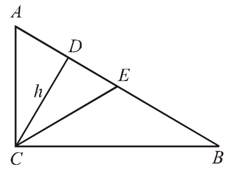
tri uzastopna prirodna broja jedan od njih je djeljiv sa 3. Ako je $n-1$ paran broj tada je i $n+1$ paran broj, pa n^2 djeljiv sa 4. Slično je i u slučaju kad je $n-1$ neparan broj. Dakle, proizvod $a(a+1)$ je djeljiv sa $3{\cdot}4=12$.



Sl. 275



Sl. 276



Sl. 277

768. Proizvod dva dvocifrena broja uvijek je veći od 100, a manji od 10000. Prema tome traženi proizvod može biti ili 444 ili 4444.
1) Kako je $444=4\cdot111=4\cdot3\cdot37$, to je jedno rešenje $12\cdot37$.
2) Slično, $4444=4\cdot1111=4\cdot11\cdot101=44\cdot101$. Kako je 101 prost broj, to u ovom slučaju ne postoji proizvod dva dvocifrena broja.

769. Neka je $\sphericalangle BAC=\alpha$, $\sphericalangle ABC=\beta$, i $\sphericalangle ACB=\gamma$, $\sphericalangle ADB=\varphi$, sl. 275. Tada, iz uslova zadatka, za $\triangle ABD$ važi: $\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}=180^0-124^0=56^0$; $\alpha+\beta=112^0$, pa je $\gamma=68^0$.

770. Iz prve korpe treba oduzeti $5\frac{3}{4}\,kg$ jabuka da bi bilo jednako jabuka u obje korpe. Ako u drugoj korpi treba da ima više za $2{,}25\,kg$ onda iz prve korpe treba još oduzeti $2{,}25\,kg$, što je ukupno $5\frac{3}{4}+2{,}25\,kg=8\,kg$.

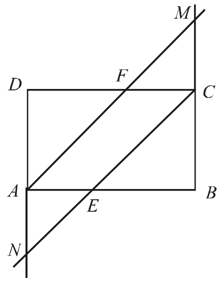
771. Prema uslovu zadatka stranica BE trougao BED jednaka je stranici CB trougla CBA (jer je $\triangle EBC$ jednakokraki pravougli); sl. 276. Prema uslovima zadatka, važi $\sphericalangle DBE=\sphericalangle ACB$ i $\sphericalangle BED=\sphericalangle CBA$ (uglovi sa normalnim kracima); svi su oštri uglovi. Dalje zaključujemo da su trouglovi ABC i DEB podudarni.

772. Godina ima 365 dana, pa 730 učenika može biti raspoređeno tako da ni u jednom danu nema više od 2 učenika čiji je to rođendan, ali pošto u školi ima 800 učenika, prema kriteriju Dirihlea, bar u jednom danu mora biti rođendan za tri ili više učenika. Slično razmatramo i ako je godina prestupna.

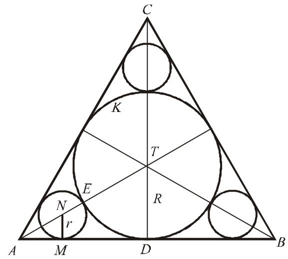
773. Ako u jednakost $\frac{a}{b}+\frac{a}{c}=\frac{11}{10}$ uvrstimo $b=\frac{5c}{12}$, onda ćemo poslije sređivanja dobiti $\frac{a}{c}=\frac{11}{14}$. Dalje je, $\frac{a}{b}=\frac{11}{10}-\frac{a}{c}=\frac{11}{10}-\frac{11}{14}=\frac{11}{35}$.

774. $\sqrt{\left(\sqrt{5}-5\right)^2}-\left(\sqrt{5}+5\right)=\left|\sqrt{5}-5\right|-\sqrt{5}-5=\left(5-\sqrt{5}\right)-\left(\sqrt{5}+5\right)=-2\sqrt{5}$.

775. Primjenom Pitagorine teoreme na pravougli $\triangle ABC$, sl. 277, dobijamo $AB=50\ cm$, pa je težišna duž $CE=25\ cm$. Primjenom Pitagorine teoreme na trouglove CDE i CDA izračunamo hipotenuzinu visinu h: $h^2=CE^2-DE^2=25^2-ED^2$ i $h^2=AC^2-(AE-ED)^2=30^2-(25-ED)^2$. Izjednačavanjem desnih strana ovih jednakosti i poslije sređivanja je $ED=7\ cm$.



Sl. 278



Sl. 279

776.Četverougao $ANCM$, sl. 278, je sastavljen od dva jednakokraka pravougla trougla ($\triangle AEN$ i $\triangle FCM$) stranice $2\ cm$ i četverougla $AECF$ čija se površina razlici površine pravougaonika $ABCD$ i površinu dva jednakokraka pravougla trougla ($\triangle AFD$ i $\triangle EBC$) stranice $3\ cm$. Dakle $P=5\cdot 3+2^2-3^2=10\ cm^2$

777. Broj djeljiv sa 15 mora biti djeljiv sa 3 i sa 5. Dakle traženi broj mora imati najmanje tri cifre 4, a kako zadnja cifra mora biti 0, onda je to broj 4440.

778. Prema uslovu zadatka važi $\frac{m+1}{m+4}+\frac{5}{m-7}=\frac{m+1}{m+4}\cdot\frac{5}{m-7}$,, pa je $\frac{(m+1)(m-7)+5(m+4)}{(m+4)(m-7)}=\frac{5(m+1)}{(m+4)(m-7)}$; $\frac{m^2-m+13}{(m+4)(m-7)}=\frac{5(m+1)}{(m+4)(m-7)}$. Iz jednakosti nazivnika slijedi da su jednaki i brojnici, te važi: $m^2-m+13=5m+5$; $m^2-6m+8=0$. Kako je $m^2-6m+8=m^2-2m-4m+8=m(m-2)-4(m-2)=(m-2)(m-4)$, dobijamo da je $(m-2)(m-4)=0$, odakle slijedi $m=2$ ili $m=4$.

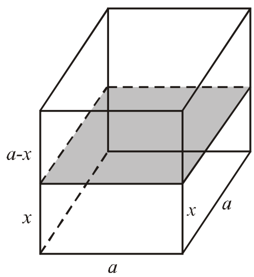
779. Tačka T je težište jednakostaničnog trougla stranice a, sl. 279, i važi $TA=\frac{2}{3}\cdot h=\frac{2}{3}\cdot\frac{a\sqrt{3}}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{3}$. Trougao ATD je pravougli sa uglom sa oštrim uglovima od 30^0 i 60^0; $\sphericalangle TAD=30^0$. Neka je R poluprečnik kruga K. Tada je: $R=\frac{TA}{2}=\frac{a\sqrt{3}}{6}$. Površina kruga K: $P_K=r^2\cdot\pi=\left(\frac{a\sqrt{3}}{6}\right)^2\cdot\pi=\frac{a^2\cdot\pi}{12}$. Prema oznakama na slici, za poluprečnik r manjih krugova važi: $r=\frac{AN}{2}=\frac{\frac{AT}{3}}{2}=\frac{\frac{a\sqrt{3}}{3}}{6}=\frac{a\sqrt{3}}{18}$, jer je $\triangle$AMN pravougli sa oštrim uglovima 30^0 i 60^0; $\sphericalangle MAN=30^0$. Dakle, površina kruga poluprečnika r je: $P=r^2\cdot\pi=\left(\frac{a\sqrt{3}}{18}\right)^2\cdot\pi=\frac{a^2\cdot\pi}{108}$. Dakle,
$P_K:3P=\frac{a^2\cdot\pi}{12}:\frac{a^2\cdot\pi}{36}=3$.

780. Koristićemo nejednakost aritmetičke i geometrijske sredine, pozitivnih realnih brojeva a i b: $\frac{a+b}{2}\geq\sqrt{ab}$, tj. $a+b\geq 2\sqrt{ab}$. Slično: $b+c\geq 2\sqrt{bc}$ i $c+a\geq 2\sqrt{ca}$. Množenjem ove tri nejednakosti dobijamo:
$(a+b)(b+c)(c+a)\geq 2\sqrt{ab}\cdot 2\sqrt{bc}\cdot 2\sqrt{ca}=8\sqrt{(abc)^2}=8abc$. Jednakost važi za $a=b=c$.

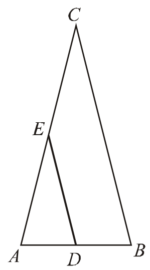
781. Neka ravan dijeli datu kocku na dva kvadra čije su visine x i $a-x$, sl. 280. Tada je $P_1=2a^2+4ax$ i $P_2=2a^2+4a(a-x)$. Kako je $P_1 : P_2=2 : 3$, to važi $(2a^2+4ax)$: $(2a^2+4a(a-x)=2:3$, odnosno $6a^2=20ax$, tj. $x=\frac{3a}{10}$. Dakle, omjer njihovih zapremina je $V_1 : V_2=(a^2x):\left(a^2(a-x)\right)=x:(a-x)=\frac{3a}{10}:\frac{7a}{10}=3:7$.

782. Ako je $2p+3q=201$, onda je $2=201-3q=3(67-q)$. Kako je desna strana jednakosti deljiva sa 3 to mora biti i lijeva. Broj $2p$ je deljiv sa 3 samo ako je $p=3$, jer je $p=3$ jedini prost broj deljiv sa 3. Tada je $2=67-q$, a $q=65$ što nije prost broj. Dakle, ova jednačina nema rješenja u skupu prostih brojeva.

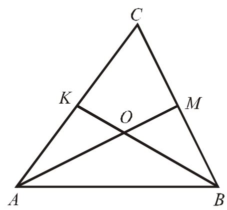
783. Kako je $a+b+c=10$, to je $2010\cdot a+2011\cdot b+2012\cdot c=2011\cdot a+2011\cdot b+2011\cdot c$ $-a+c=2011\cdot(a+b+c)-a+c=20110+c-a$. Najmanja vrijednost izraza dobija se ako je c najmanje i a najveće, dakle $c=1$ i $a=8$: $20110+1-8=20103$. Najveća vrijednost dobija se kada je c najveće i a najmanje, dakle $c=8$ i $a=1$, pa je $20110+8-1=20117$.



Sl. 280



Sl. 281

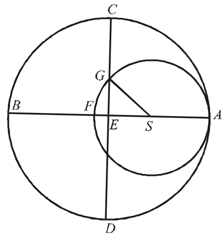


Sl. 282

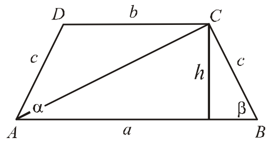
784. Očigledno da $p=2$, u o tom slučaju $p+10$ i $p+14$ su složeni brojevi. Za $p=3$, $p+10$ i $p+14$ su prosti brojevi. Ako je $p>3$ prost broj, onda p pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 1 ili *2* i može se napisati u obliku $3k+1$ ili $3k+2$, gdje je k prirodan broj. Ako je $p=3k+1$, onda je $p+14=3k+1+14=3k+15=3(k+5)$, pa je $p+14$ složen broj. Ako je $p=3k+2$, onda je $p+10=3k+2+10=3k+12=3(k+4)$, pa je $p+10$ složen broj broj. Jedino rješenje je $p=3$.

785. Neka je $AB=a$, sl. 281. Kako je $O_{DBCE}=O_{ADE}+42$, važi: $\frac{3a}{2}+\frac{3a}{2}+\frac{a}{2}+3a=\frac{3a}{2}+\frac{a}{2}+\frac{3a}{2}+42$, pa je $a=14\ cm$ i $O_{ABC}=a+3a+3a=7a=7\cdot14=98\ cm$.

786. Neka se duži AM i BK sijeku u tački O, sl. 282. Ako se ove duži polove, onda je $\triangle ABO\cong\triangle MKO$ ($AO=OM$, $BO=OK$, $\sphericalangle AOB=\sphericalangle MOK$), pa je $AB=KM$. Slično, iz podudarnosti $\triangle AOK\cong\triangle BOM$ slijedi $AK=BM$. Kako je $AB=KM$ i $AK=BM$, to je četverougao $ABMK$ paralelogram, što je nemoguće, jer tačke M i K, prema uslovima zadatka, pripadaju stranicama $\triangle ABC$. Dakle, duži AM i BK se ne mogu poloviti.



Sl. 283



Sl. 284

787. Očigledno da je svaki peti član niza paran jer u prvom koraku sabiramo četiri neparna broja što daje paran rezultat, dakle zadnja cifra je parna. U drugom, trećom i četvrtom koraku sabiramo tri neparna i jedan paran što daje neparan zbir. Zatim, u sljedećem petom koraku zbir četiri neparna člana je paran broj. Kako je 1 ostatak pri dijeljenju 2011 sa 5, to je na 2011. mjestu neparna cifra.

788. Transformišimo datu jednakost: $(-x_1+x_2)+(-x_3+x_4)+\cdots+(-x_{2009}+x_{2010})-x_{2011}=2012$. Prema uslovima zadatka, zbir brojeva u svakoj zagradi je 1, pa važi: $\left(\underbrace{1+1+1+\cdots+1}_{1005}\right)-x_{2011}=2012$, odnosno $x_{2011}=1005-2012=-1007$.

789. Za pravougli $\triangle SGE$, sl. 283, važi $SG^2=GE^2+ES^2$, tj. $r^2=(R-3)^2+(R-r)^2$. Odavde sređivanjem dobijamo: $2R^2-6R+9-2Rr=0$; $R(2R-2r)-6R+9=0$. Kako je $2R-2r=BF=5$, to je $R=9$ i $r=\frac{13}{2}$.

790. Iz $2x^2+2y^2=5xy$ slijedi $2x^2+4xy+2y^2=9xy$, odnosno $(x+y)^2=\frac{9xy}{2}$; $x+y=3\sqrt{\frac{xy}{2}}$. Takođe iz $(x-y)^2=\frac{xy}{2}$ slijedi $x-y=-\sqrt{\frac{xy}{2}}$, jer je $0<x<y$, pa je

$$1-\frac{x+y}{x-y}=1+3\sqrt{\frac{xy}{2}}:\sqrt{\frac{xy}{2}}=4.$$

791. Iz pravouglog $\triangle ACB$, sl. 284, slijedi $\frac{\alpha}{2}+\beta=90^{\circ}$; $\frac{\alpha}{2}=30^{\circ}$; ⍰$=60^{\circ}$. Trougao ABC je pravougli sa oštrim uglovima 30° i 60°, pa je $AB=2\cdot BC$. Kako je $\sphericalangle A=\alpha=60^{\circ}$, to je trapez jednakokraki, pa je $AD=BC$. Uglovi DCA i BAC su naizmjenični i iznose 30° i na osnovu toga slijedi $DC=DA=BC=\frac{AB}{2}=\frac{a}{2}$. Kako je obim trapeza $2\ m=200\ cm$, to važi $a+\frac{3a}{2}=200$, $a=80\ cm$. Visina trapeza h jednaka je visini $\triangle ACB$. Kako je $h=\frac{c\sqrt{3}}{2}$, to je površina trapeza:
$P=\frac{a+b}{2}\cdot h=\frac{80+40}{2}\cdot 2\sqrt{3}=120\sqrt{3}\ cm^2$.

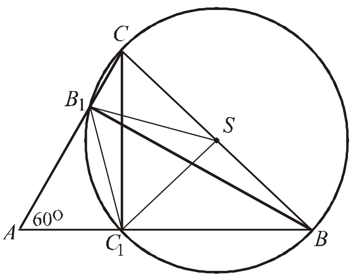
792. Ako je $x^2+y^2+2x-6y+10=0$ onda je $x^2+2x+1+y^2+6y+9=0$ ili $(x+1)^2+(y-3)^2=0$. Odavde imamo $x=-1$ i $y=3$, pa je $P(x,y)=P(-1,3)=(-1)^{2011}+2011\cdot 3=6032$.

793. Množenjem jednakosti $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}=\frac{1}{c}$ sa abc dobijamo: $ac+bc-ab=0$. Kako je $(a+b-c)^2= =a^2+b^2+c^2-2(ac+bc-ab)=a^2+b^2+c^2$, važi:
$\sqrt{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{(a^2+b^2+c^2)^2}=|a^2+b^2+c^2|$.
Dakle, $|a^2+b^2+c^2|$. je racionalan broj, što je i trebalo dokazati.

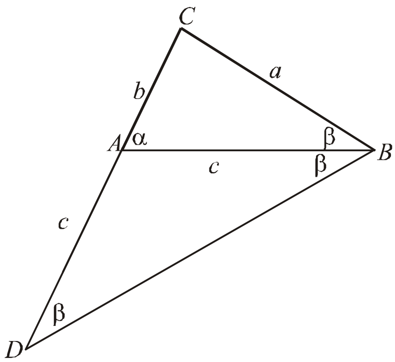
794. Broj dijagonala mnogouglova sa m, odnsno n ($m>n\geq3$) stranica je, redom; $\frac{m(m-3)}{2}$, $\frac{n(n-3)}{2}$. Prema uslovu zadatka važi $\frac{m(m-3)}{2}-\frac{n(n-3)}{2}=2011$. Sređivanjem ove jednakosti dobijamo: $m^2-3m-n^2+3n=4022$; $(m-n)\cdot(m+n-3)=4022$; $(m-n)\cdot(m+n-3)=1\cdot2\cdot2011$, (broj 2011 je prost). Iz posljednje jednakosti, zbog $m>n\geq3$, slijedi: $m-n=1$ i $m+n-3=4022$ ili $m-n=2$ i $m+n-3=2011$. Rješavanjem ovih sistema jednačina dobijamo: $m=2013$, $n=2012$ ili $m=1007$, $n=1006$.

795. Kružnica sa centrom u S i poluprečnikom SB sadrži tačke B_1 i C_1, trouglovi BB_1C i CC_1B su pravougli sa zajedničkom hipotenuzom CB, sl. 285. Kako je $\alpha=60^o$, to je, u pravouglom $\triangle ABB_1$, $\sphericalangle ABB_1=30^o$. Ugao C_1BB_1 je periferijski ugao nad lukom C_1B_1 kome odgovara centralni ugao C_1SB_1, pa je $\sphericalangle C_1SB_1=60^O$ (dva puta veći od periferijskog). Pošto je $SC=SB_1$, to je $\triangle SC_1B_1$ jednakokraki sa uglom od 60^o kod tjemena S, pa su uglovi na osnovici takođe po 60^o. Dakle, $\triangle SC_1B_1$ je jednakostraničan, što je i trebalo dokazati.

796. Iz uslova zadatka slijedi $a:b=(b+c):a$. Ovu proporciju ćemo iskoristiti da konstruišemo slične trouglove, jedan sa stranicama a i b, a drugi sa stranicama $b+c$ i a. To ćemo uraditi na sljedeći način: produžimo stranicu AC preko tjemena A za duž AB i tu tačku označimo D, sl. 286. Iz proporcije $a:b=(b+c):a$ i oznaka na slici zaključujemo: $\triangle ABC\sim\triangle BDC$. Kako je ugao kod tjemena C zajednički, a stranice koje ga obrazuju su proporcionalne, to važi $\sphericalangle BAC=\sphericalangle DBC=\alpha$ i $\sphericalangle ABC=\sphericalangle BDC=\beta$. Kako je $\triangle ADB$ jednakokraki, to je $\sphericalangle DBA=\sphericalangle BDA$. Dalje slijedi $\alpha=\sphericalangle DBC=\sphericalangle DBA+\sphericalangle ABC=2\beta$. Dakle, $\alpha:\beta=2:1$.



Sl. 285



Sl. 286

797. Neka je O centar osnove, r poluprečnik osnove, H visina i s izvodnica kupe, H_1 i H_2 dijelovi visine H, tada je: $\frac{M_1+M_2}{M_1}=\frac{2}{1}$; $\frac{r\pi s}{r_1\pi 1_1}=\frac{rs}{r_1 s_1}=\frac{r}{r_1}\cdot\frac{s}{s_1}=\frac{H}{H_1}\cdot\frac{H}{H_1}=\frac{H^2}{{H_1}^2}=\frac{2}{1}$. Odavde slijedi: $\frac{H}{H_1}=\sqrt{2}$; $\frac{H_1+H_2}{H_1}=\sqrt{2}$; $\frac{H_2}{H_1}=\sqrt{2}-1$.

798. Iz jednakosti $a^2+b^2-12a+2b+37=(a-6)^2+(b+1)^2=0$ slijedi $a=6$ i $b=-1$, pa je $b^{2012}+2102\cdot a=(-1)^{2012}+2012\cdot 6=1+12072=12073$.

799. Iz $\frac{a+b}{b}=2-\sqrt{2}$ slijedi: $\frac{a}{b}+1=2-\sqrt{2}$, tj. $\frac{a}{b}=1-\sqrt{2}$. Dalje računamo:

$$\frac{a^2+b^2}{ab}=\frac{a}{b}+\frac{b}{a}=1-\sqrt{2}+\frac{1}{1-\sqrt{2}}\cdot\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}}=-2\sqrt{2}.$$

800. Ako sa a i b označimo katete trougla, a sa h hipotenuzinu visinu, tada je $a^2=h^2+DB^2=h^2+16^2$; $b^2=h^2+AD^2=h^2+9^2$; $a^2+b^2=(9+16)^2$, sl. 287. Iz posljednje jednakosti, uvrštavanjem a^2 i b^2 dobijamo $h^2=144$, tj. $h=12\ cm$. Obim pravouglog trougla: $O=60\ cm$, a površina: $P=\frac{ab}{2}=150\ cm^2$.

801. Trouglovi APD i DPR, sl. 288, imaju zajedničku osnovicu i jednake visine, pa su im jednake površine: $P_{DPA}=P_{DPR}$. Takođe važi $P_{DPA}=P_{ASD}+P_{DPS}$ i $P_{DPR}=P_{PSR}+P_{DPS}$, pa je $P_{ASD}=P_{PSR}$. Slično zaključujemo: trouglovi PQR i BCQ imaju jednake površine, te je $P_{PQR}=P_{BCQ}$ i slijedi da je zbir površina trouglova ASD i BQC jednak površini četverougla $PQRS$, što je i trebalo dokazati.

802. Pretpostavimo da je u svakoj od tih grupa proizvod brojeva manji od 72. Tada bi proizvod u sve tri grupe bio manji ili jednak od $71\cdot 71\cdot 71=357911$, a za proizvod svih brojeva od 1 do 9 važi $1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9>357911$. Dakle pretpostavka nije tačna i zaključujemo da je bar u od tri date grupe manji od 72.

803. $a-b=\left(\frac{1^2}{1}+\frac{2^2}{3}+\frac{3^2}{5}+\cdots+\frac{2012^2}{4023}\right)-\left(\frac{1^2}{3}+\frac{2^2}{5}+\frac{3^2}{7}+\cdots+\frac{2011^2}{4023}\right)=$

$$\frac{1^2}{1}+\frac{2^2-1^2}{3}+\frac{3^2-2^2}{5}+\frac{4^2-3^2}{7}+\frac{5^2-4^2}{9}+\cdots+\frac{2012^2-2011^2}{4023}=$$

$$=1+1+1+\cdots+1=2011$$

804. Neka je prava BG paralelna sa pravom AD, sl. 289. Tada je $\frac{CF}{FG}=\frac{2011}{2012}$; $FG=\frac{2012\cdot CF}{2011}$; $\frac{FG}{2}=\frac{1006\cdot CF}{2011}$ i važi $\frac{CF}{FG}=\frac{CF}{\frac{FG}{2}}=\frac{2011}{1006}$

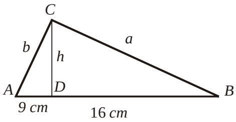
805. Neka je P_1 površina većeg, a P_2 površina manjeg kruga. Tada je, prema uslovima zadatka: $\frac{P_1}{7}=\frac{P_2}{4}$; $P_2=\frac{4P_1}{7}$; $P_2=\frac{4}{7}\cdot 7^2\cdot\pi=28\pi\ cm^2$.

806. Svaka od sedam novčanica se može rasporediti na dva različita načina, pa je broj rasporeda $2^7=128$.

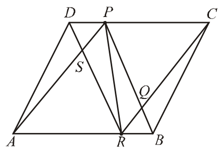
807. Iz jednakosti $\frac{a}{b}=\frac{b}{c}$ slijedi $b^2=ac$, pa je $\frac{a^2+b^2}{b^2+c^2}=\frac{a(a+c)}{c(a+c)}=\frac{a}{c}$.

808. Trouglovi AMQ i MNQ, sl. 290, imaju jednake osnovice, $AM=MN$, i zajedničku odgovarajuću visinu, pa su im jednake površine (označimo ih sa P_1). Slično zaključujemo da su jednake površine trouglova CPN i PQN, označene sa P_2. Površina četverougla $MNPQ$: $P_{MNPQ}=P_1+P_2$. Dokažimo da je zbir površina trouglova ADQ i BCN jednak trećini površine četverougla $ABCD$, tj. da je jednak 1. $\triangle ADQ$ ima tri puta manju osnovicu od trougla ACD, a visina im je zajednička.

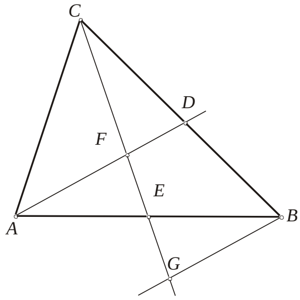
Zbog toga je $P_{ADQ}=\frac{P_{ACD}}{3}$. Slično, $P_{BCN}=\frac{P_{ABC}}{3}$, pa je $P_{ADQ}+P_{BCN}=\frac{P_{ACD}}{3}+\frac{P_{ABC}}{3}=\frac{P_{ABCD}}{3}=1$. Kako je $P_{ANCQ}=2$, zbog $P_{ABCD}=3$ i $P_{ADQ}+P_{BCN}=1$, to važi $P_{ANCQ}=2\cdot P_1+2\cdot P_2=2$, odnosno $P_1+P_2=1$, tj. $P_{MNPQ}=1$.



Sl. 287



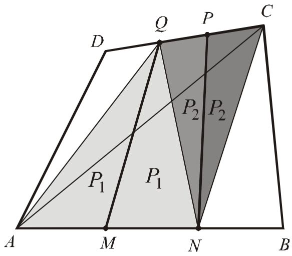
Sl. 288



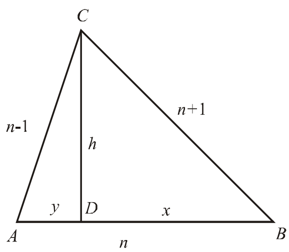
Sl. 289

809.
$4^9+6^{10}+3^{20}=(2^2)^9+(2\cdot3)^{10}+(3^{10})^2=(2^9)^2+2^{10}\cdot3^{10}+(3^{10})^2=(2^9)^2+2\cdot2^9\cdot3^{10}+(3^{10})^2=(2^9+3^{10})^2$.

810. Neka je $h=CD$ visina koja odgovara srednjoj po veličini stranici AB i neka su x i y odsječci na koje tačka D dijeli stranicu AB, sl. 291. Dužine stranica AC, AB, BC označimo redom $n-1$, n, $n+1$. Tada je $x+y=n$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na pravougle trouglove ACD i BCD: $(n-1)^2-y^2=h^2$ i $(n+1)^2-x^2=h^2$, pa je: $(n-1)^2-y^2=(n+1)^2-x^2$; odnosno $x^2-y^2=(n+1)^2-(n-1)^2$, a odavde je: $(x-y)(x+y)=4n$. Kako je $x+y=n$, to je $x-y=4$.



Sl. 290



Sl. 291

811. $\sqrt{(3x-2)(x-2)-2x(x-2)}-\sqrt{2}=\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{2}=|x-2|-\sqrt{2}=|3-\sqrt{2}-2|-\sqrt{2}=|1-\sqrt{2}|-\sqrt{2}=-(1-\sqrt{2})-\sqrt{2}=-1$.

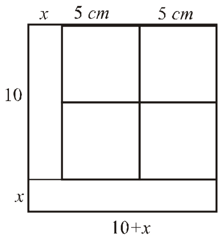
812. Broj 7^4 pri dijeljenju sa 10 daje ostatak 1; svaki stepen broja 7^4 daje ostatak 1. Kako je $7^{2012}=(7^4)^{503}$, zaključujemo da broj 7^{2012} pri dijeljenju sa 10 daje ostatak 1, a $7^{2012}-1$ pri dijeljenju sa 10 daje ostatak 0, tj. broj $7^{2012}-1$ deljiv sa 10.

813. Kako je 6 cifra jedinica broja 8^4, to je $8^{2012}=(8^4)^{503}$, pa je 6 cifra jedinica stepena 8^{2012}. Cifra jedinica svakog stepena broja 6, pa i broja 6^{2011}, je takođe cifra 6. Tada je 0 cifra jedinica razlike $8^{2012}-6^{2011}$, pa je ona djeljiva sa 10.

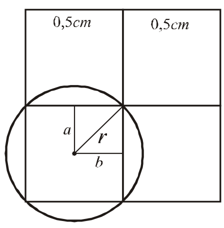
814. Transformisanjem datog izraza i korišćenjem jednakosti za $a-c=7$ dobijamo: $a+2)+c(c-2)-2ac=a^2+2a+c^2-2c-2ac=(a-c)^2+2(a-c)=7^2+2\cdot 7=49+14=63$.

815. Prema uslovima zadatka, površina svakog od pet dijelova velikog kvadata je 25 cm^2, sl. 292, te su dužine stranica kvadrata 5 cm. Površina mnogougla je 25 cm^2 i može se prikazati kao zbir površina dva pravougaonika stranica x i 10, odnosno x i $10+x$: $10x+x(10+x)=125$. Kako je $x^2+20x-125=0$; $x^2+20x+100-25=0$; $(x+10)^2-125=0$; $(x+10)^2-\left(5\sqrt{5}\right)^2=0$; $\left((x+10)-5\sqrt{5}\right)\left((x+10)+5\sqrt{5}\right)=0$; $x=5\sqrt{5}-10$ ili $=-5\sqrt{5}-10$ Kako je $x>0$, to je $x=5\sqrt{5}-10=5\left(\sqrt{5}-2\right)\,cm$.

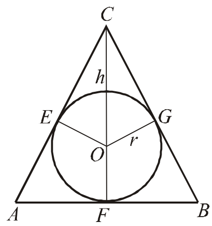
816. Podijelimo kvadrat stranice 1 cm na četiri kvadrata stranice $\frac{1}{2}$ cm, sl. 293. Tada bar u jednom kvadratu moraju biti najmanje tri tačke. Neka je to donji lijevi kvadrat. Tada je: $r^2=a^2+b^2$. Kako je $a=\frac{1}{2}\,cm$ i $b=\frac{1}{2}\,cm$, $r^2=\frac{1}{8}\,cm$; $r=\frac{1}{\sqrt{8}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}<\frac{1{,}44}{4}<0{,}36=\frac{36}{100}=\frac{9}{25}<\frac{10}{25}=\frac{2}{5}$, što je i trebalo dokazati.



Sl. 292



Sl. 293



Sl. 294

817. Neka su a, H, D, redom, dužine ivice osnove, visine i dijagonale šestostrane prizme. Tada je $a+H=10$ i $D^2=(2a)^2+H^2$, pa je $D^2=4a^2+H^2=4a^2+(10-a)^2=4a^2+100-20a+a^2=5a^2-20a+100=5(a^2-4a+20)=5[(a-2)^2+16]$. Izraz $5[(a-2)^2+16]$ ima najmanju vrijednost ako je $a=2$. Za $a=2cm$, dobijamo $H=8\ cm$, pa je površina šestostrane prizme: $P=2\cdot 3a^2\sqrt{3}+6a\cdot H=24\sqrt{3}+96=24\left(\sqrt{3}+4\right)\,cm^2$, a zapremina: $V=3a^2\sqrt{3}\cdot H=13\sqrt{3}\cdot 8=96\sqrt{3}\,cm^3$

818. Iz jednakosti $h_c=h_a+h_b$, jasno je da je stranica $c=2\ cm$, jer joj odgovara najduža visina. Kako je $P=\frac{ah_a}{2}=\frac{bh_b}{2}=\frac{ch_c}{2}$, to je $h_a=\frac{2P}{a}$; $h_b=\frac{2P}{b}$; $h_c=\frac{2P}{c}$.

Odavde slijedi: $\frac{2P}{2}=\frac{2P}{a}+\frac{2P}{b}$; $1=\frac{2}{a}+\frac{2}{b}$; $ab=2a+2b$; $a=\frac{2b}{b-2}$; $a=a=\frac{2b}{b-2}=2+\frac{4}{b-2}$. Kako je, prema uslovima zadatka, b prirodan broj, važi $b\in\{3,4,6\}$. Direktnim provjeravanjem, dobijamo da je $b=4$, $a=4$. Površina trougla: $P=\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, gdje je $s=(a+b+c)/2$ i važi $P=\sqrt{5(5-4)(5-4)(5-2)}=\sqrt{15}\,cm^2$.

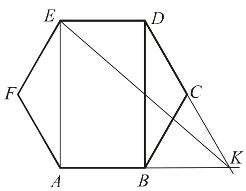
819. Neka je h visina iz tjemena C na stranicu AB, sl. 294. Tada je, prema uslovu zadataka $r=3\ cm$. Iz pravouglog $\triangle CDE$, primjenom Pitagorine teoreme, slijedi da je $CE=4\ cm$. Primijenimo Pitagorinu teoremu na $\triangle AFC$: $AC^2=AF^2+CF^2$. Kako je $AC=AE+4$, $AF=8$ i $AF=AE$, to važi $(AE+4)^2=AE^2+8^2$, odnosno $AE^2+8\cdot AE+16=AE^2+64$, pa je $AE=6\ cm$. Kako je $AE=AF$, to je: $AC=BC=10\ cm$, $AB=12\ cm$.

820. Neka je broj n^3+3 djeljiv sa $n+3$. Kako je $n^3+3=(n+3)(n^2-3n+9)-24$, to je 24 djeljivo sa $n+3$, pa zaključujemo $n+3\in\{4,6,8,12,24\}$, tj. $n\in\{1,3,5,9,21\}$.

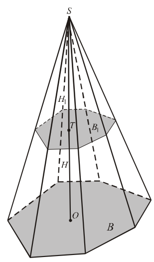
821. Trougao BCK je jednakostraničan stranice 1 cm (sl. 295.), a $\triangle BCD$ je jednakokraki sa oštrim uglom od 30^0, pa je $\measuredangle DBK=90^0$. Kako je $BK=1\ cm$, $DK=2\ cm$, to na osnovu Pitagorine teoreme važi $BD^2=DK^2-BK^2$, pa je $BD^2=3$; $BD=\sqrt{3}\,cm$. Četverougao $ABDE$ je pravougaonik sa stranicama dužine 1 cm i $\sqrt{3}\,cm$. Za pravougli $\triangle EAK$ dobijamo: $EK^2=EA^2+AK^2$; $EK^2=\left(\sqrt{3}\right)^2+2^2=\sqrt{7}cm$.

822. Očito p i q moraju biti različite parnosti, pa je jedan od njih 2. Neka je $q=2$. Kako broj $p^2+2=(p^2-1)+3=(p-1)(p+1)+3$ treba da bude takođe prost to slijedi da nijedan od brojeva $p-1$ i $p+1$ nije djeljiv sa 3. Od tri uzastopna cijela broja $p-1$, p, $p+1$ jedan mora biti djeljiv sa 3, što znači da je p djeljiv sa 3, tj. $p=3$. Za $p=3$ i $q=2$ dobijamo: $p^2+q=11$ i $p+q^2=7$. Dakle postoje dva uređena (p,q) prostih brojeva za koje su p^2+q i $p+q^2$ takođe prosti: (3,2) i (2,3).

823. Neka je V zapremina pravilna n-tostrana piramida osnove B i visine H, a V_1 zapremina manje piramide, koja se dobije presjekom, sl. 296. Ako je njena osnova B_1, a visina H_1. Tada je $V=2V_1$; $\frac{B\cdot H}{2}=2\cdot\frac{B_1\cdot H_1}{2}$, odnosno $\frac{B}{B_1}\cdot\frac{H}{H_1}=2$. Površine osnova B i B_1 odnose se kao kvadrati njihovih visina: $\frac{B}{B_1}:\frac{H}{H_1}=k^2:k=2$, te iz jednakosti $\frac{B}{B_1}\cdot\frac{H}{H_1}=2$ slijedi $k^2\cdot k=2$; $k=\sqrt[3]{2}$. Kako je $H_1=\frac{B}{B_1}\cdot\frac{H}{2}$, važi: $H_1=\left(\sqrt[3]{2}\right)^2\cdot\frac{H}{2}$; $H_1=\sqrt[3]{4}\cdot\frac{H}{\sqrt[3]{8}}=\frac{H}{\sqrt[3]{2}}$.



Sl. 295



Sl. 296

824 Dokažimo da je $a<b$, tj. $\frac{b+c}{3} < b$, tj. $c<2b$. Ovim je nejednakost $a<b$ dokazana. Analogno se dokazuje da je $a<c$.

825. Ako svakom od četiri člana ove jednakosti dodamo 1, onda poslije sređivanja dobijajmo: $\frac{x+y+z+t}{y+z+t} = \frac{x+y+z+t}{z+t+x} = \frac{x+y+z+t}{t+x+y} = \frac{x+y+z+t}{x+y+z}$.

a) Ako su brojnici razlomaka različiti od 0, onda slijedi: $y+z+t=z+t+x=t+x+y$ $=x+y+z$, pa je $x=y=z=t$ i važi $\frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{z+t} = 4$

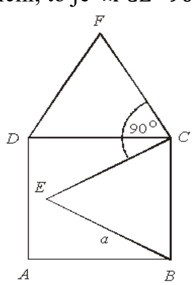
b) Ako su brojnici jednaki 0, onda je $x+y=-(z+t)$, $y+z=-(t+x)$, $z+t=-(x+y)$, $t+x=-(y+z)$ pa je $\frac{x+y}{z+t} + \frac{y+z}{t+x} + \frac{z+t}{x+y} + \frac{t+x}{z+t} = -4$

826. Data nejednakost je ekvivalentna sa nejednakostima:
$\frac{1}{c} \cdot \left(\frac{a}{b} + \frac{b}{a} + 2\right) + \frac{c}{ab} \geq \frac{2}{a} + \frac{2}{b}$; $\frac{1}{c} \cdot \frac{(a+b)^2}{ab} + \frac{c}{ab} \geq \frac{2(a+b)}{ab}$; $(a+b)^2 + c^2 \geq 2(a+b) \cdot c$; $(a+b-c)^2 \geq 0$. Posljednja nejednakost je tačna. Jednakost važi samo ako je $a + b - c = 0$.

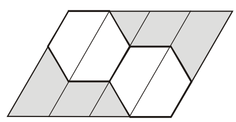
827. Na svakoj od 7 vertikalnih pravih nalaze se po 3 obojene tačke. Pri tome važi bar jedna od sljedeće dvije mogućnosti: mogu se izabrati 4 vertikalne prave tako da na svakoj od njih budu bar dvije crvene (plave) tačke. U prvom slučaju postoje dvije od te 4 vertikalne prave na kojima su po dvije crvene tačke raspoređene na istim mjestima (prvom i drugom, prvom i trećem ili drugom i trećem, gledajući odozgo nadole). Te četiri crvene tačke su tjemena pravougaonika. Slično tvrđenje važi i u drugom slučaju za plave tačke.

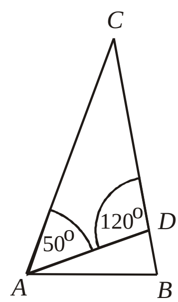
828. Isti dani u uzastopnim sedmicama imaju datume različite parnosti. Kako tri utorka imaju parne datume, to se radi o prvom, trećem i petom utorku u mjesecu. Preciznije, samo je jedna mogućnost koja zadovoljava uslove. Prvi utorak u tom mjesecu ima datum 2, treći utorak ima datum 16, a peti datum 30. (Dva utorka sa neparnim datumima su drugi utorak u mjesecu sa datumom 9. i četvrti utorak sa datumom 23.). Dakle, 21. je bila nedjelja.

829. Stranica kvadrata je $a = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, sl. 297. Kako su trouglovi jednakostranični, to je $\sphericalangle FCE = 90^{\circ}$ i $\triangle FCE$ je jednakokraki sa hipotenuzom, $EF = a\sqrt{2} = 4$.



Sl. 297


Sl. 298



Sl. 299

830. Nepoznata cifra a može biti 5, 6 ili 7. Dijeljenjem dobijenog broja sa 3 i sa 5, uvjerićemo se da je u prvom slučaju taj broj djeljiv i sa 3 i sa 5, u drugom slučaju ostaci dijeljenje sa 3 i sa 5 su 1, a u posljednjem slučaju ostaci dijeljenja sa 3 i sa 5 su 2. Dakle, $a \in \{1.2\}$.

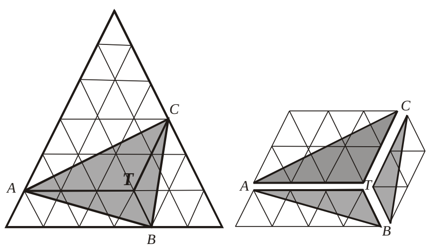
831. Šrafirana je polovina površine paralelograma, jer uglovi paralelograma su 60^0 i 120^0, te je površina svakog od četiri bijela četverougla jednaka zbiru odgovarajućih površina šrafiranog dijela površine, sl. 298.

832. Uočimo $\triangle ADC$, sl. 299, $\sphericalangle ACD=10^0$, pa je $\sphericalangle CAB=85^0$, $\triangle ABC$ je jednakokraki sa osnovicom AB, slika. Dalje je $\sphericalangle DAB=\sphericalangle CAB-\sphericalangle CAD=85^0-50^0=35^0$.

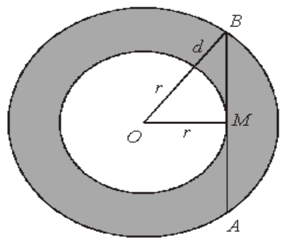
833. Površina kvadrata je $36\ cm^2$. Nešrafirani trouglovi su podudarni i pravougli sa katetama $4\ cm$ i $6\ cm$, pa je površina svakog od njih $\frac{4\cdot 6}{2}=12\ cm^2$. Zbir površina ova dva trougla je $24\ cm^2$, pa je površina šrafiranog dijela $36\ cm^2-24 cm^2=12$. Dakle šrafirana površina je trećina površine kvadrata.

834. Treba odrediti brojeve a i b, $a<7$, $b<13$, da je $\frac{a}{7}-\frac{b}{13}=\frac{9}{91}$ ili $\frac{b}{13}-\frac{a}{7}=\frac{9}{91}$. U prvom slučaju biće $\frac{13a-7b}{91}=\frac{9}{91}$, pa je $13a-7b=9$, odakle je $a=\frac{7b+9}{13}$. Od svih prirodnih brojeva b, $b<13$, jedino za $b=8$ dobijamo da je a cijeli broj; pa je $a=5$. Dakle, $\frac{5}{7}-\frac{8}{13}=\frac{9}{91}$. U drugom slučaju biće $\frac{7b-13a}{91}=\frac{9}{91}$, tj. $7b-13a=9$, odakle je $a=\frac{7b-9}{13}$. Jedina vrijednost od b, za koju je a cio broj, je $b=5$. Tada je $a=2$, pa je $\frac{5}{13}-\frac{2}{7}=\frac{9}{91}$.

835. Dati trougao podijelimo na tri trougla: $\triangle ABT$, $\triangle ACT$ i $\triangle CAT$, sl. 300. Svaki „elementarni jednakostranični trougao" je površine $1\ cm^2$, a svaki od tri šrafirana trougla na slici jednak je polovini površine datog paralelograma. Ukupna površina $\triangle ABC$: je $\frac{1}{2}\cdot 12+\frac{1}{2}\cdot 6+\frac{1}{2}\cdot 4=11$ „elementarnih jednakostraničnih troug-lova", tj. $P_{ABC}=11\ cm^2$.



Sl. 300



Sl. 301

836. Trougao je pravougli pa primjenom Pitagorine teoreme dobijamo, sl. 301. Kako je površina datog kružnog prstena $P_{KP}=|OB|^2\pi-|OM|^2\pi=(r+d)^2\pi-r^2\pi$, važi $P_{KP}=|OB|^2\pi-|OM|^2\pi=(r+d)^2\pi-r^2\pi=((r+d)^2-r^2)\pi=64\pi$.

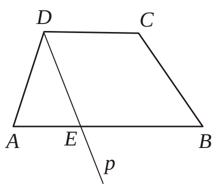
837. Kako je zbir svih godina 120, primjenom formule $1+2+3+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$, dobijamo $\frac{n(n+1)}{2}=120$, tj. $n(n+1)=240$. Dakle, 240 je proizvod dva uzastopna prirodna broja. Kako je 15·16=240, slijedi da Ružica ima 15 godina.

838. Transformišimo datu jednačinu:
$xy+x-3y-6=0 \Leftrightarrow (xy+x)-(3y+3)=3 \Leftrightarrow x(y+1)-3(y+1)=3 \Leftrightarrow (y+1)(x-3)=3$.
Dakle, $y+1$ i $x-3$ su činioci broja 3 te važi $x-3\in\{1,-1,3,-3\}$ i $y+1\in\{3,-3,3,-3\}$, odnosno $x\in\{4,2,6,0\}$; $y\in\{2,-4,0,-2\}$. Cjelobrojna rješenja (x,y) date jednačine su: (4,2) , (2,–4) , (6,0), (0,–2).

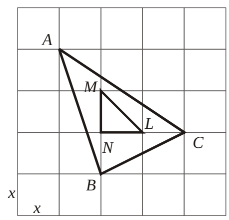
839. Prema uslovima zadatka šestocifreni broj je oblika $\overline{abcabc}$ i važi:
$\overline{abcabc}=\overline{abc}\cdot 1000+\overline{abc}=\overline{abc}\cdot(1000+1)=\overline{abc}\cdot 1001=\overline{abc}\cdot 7\cdot 11\cdot 13$.

840. Prema uslovima zadatka je $11n+8m=73$. Direktnim provjeravanjem za $n\in\{1,2,3,4,5,6\}$. zaključujemo da jedino za $n=3$ dobijamo prirodan broj $m=5$. Dakle, u prvih 11 dana učenik je rješavao po 3, a u posljednjih 8 dana po 5 zadataka dnevno.

841. Kroz tjeme D trapeza $ABCD$, konstruišimo pravu p paralelnu sa krakom BC i neka prava p siječe osnovicu AB u tački E, sl. 302. Četverougao $EBCD$ je paralelogram, pa je $AE=AB-EB=AB-CD=11-7=4\ cm$. Visina trapeze $ABCD$ jednaka je visini $\triangle AED$, na stranicu AE. Dužine stranica $\triangle AED$ su: $AE=3\ cm$, $ED=BC=5\ cm$ i $AD=4\ cm$, to zaključujemo da je $\triangle AED$ pravougli sa pravim uglom kod tje-mena A, odnosno da je krak AD trapeza $ABCD$ normalan na stranicu AB, tj $AD=4$. Dakle površina trapeze je:$P=\frac{AB+CD}{2}\cdot AD=\frac{11+7}{2}\cdot 3=27\ cm^2$.



Sl. 302



Sl. 303

842. Neka je x dužina stranice najmanjeg kvadrata kvadratne mreže, sl. 303. Tada je $P_{MNL}=\frac{x^2}{2}$ i $P_{ABC}=9x^2-\left(\frac{x\cdot 3x}{2}+\frac{x\cdot 2x}{2}+\frac{3x\cdot 2x}{2}\right)=9x^2-\frac{11x^2}{2}=\frac{7x^2}{2}$ i važi
$P_{ABC}:P_{MNL}=\frac{x^2}{2}:\frac{7x^2}{2}=1:71$.

843. Transformišimo izraz:
$9x^2+4y^2-12xy-16a^2=12 \Leftrightarrow (3x-2y)2-16a^2=12 \Leftrightarrow (3x-2y-4a)\cdot(3x-2y+4a)=12 \Leftrightarrow (3x-2y-4a)\cdot 4=12 \Leftrightarrow 3x-2y-4a=3$. Dalje, sabiranjem jednakosti $3x-2y-4a=3$ i $3x-2y+4a=4$ dobijamo $2(3x-2y)=7$, odnosno $3x-2y=\frac{7}{2}$.

844. Jasno je $x \neq 0$ i $y \neq 0$ i. Jednačinu $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2}$ možemo transformisati:

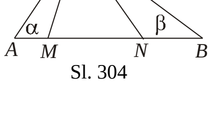
$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \Leftrightarrow 2(x+y)=xy \Leftrightarrow xy-2y=2x \Leftrightarrow y(x-2)=2x$$

Ako je x=2, onda je lijeva strana jednačine jednaka nuli, a desna je 2. To znači da $(2, y)$ nije rješenje date jednačine, pa jednačinu $y(x-2)=2x$ možemo podijeliti sa $x-2$ i dalje transformisati: $y=\frac{2x}{x-2}=\frac{2(x-2)+4}{x-2}=2+\frac{+4}{x-2}$. Kako je y cijeli broj , to je i $\frac{+4}{x-2}$ cijeli broj, pa $x-2\in\{-4,-2,-1,1,2,4\}$, tj. $x\in\{-2,0,1,3,4,6\}$, i $x \neq 0$. Direktnim računanjem dobijamo $y\in\{1,-2,6,4,3\}$.
Dakle, $(x,y) \in\{(-2,1),(1-2),(3,6),(4,4),(6,3)\}$.

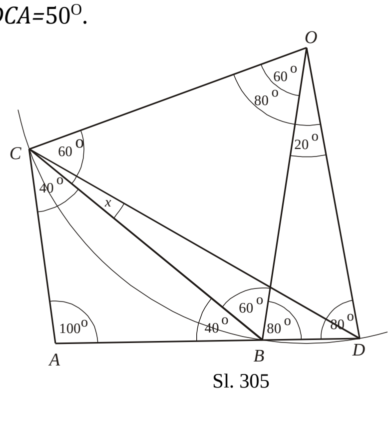
845. Odrediti sve četverocifrene brojeve $\overline{abba}$ djeljive sa 45. Prema uslovima zadatka broj $\overline{abba}$ mora biti djeljiv sa 5 i sa 9. Da bi bio djeljiv sa 5, posljednja cifra mora biti 0 ili 5, pa je a=0 ili a=5. Za a=0 traženi broj je trocifren, te zaključujemo $a\neq0$. Za a=5 broj je oblika $\overline{5bb5}$. Zbir cifara ovog četverocifrenog broja je manji od 36. Da bi broj $\overline{5bb5}$ bio djeljiv sa 9 mora biti $10+2b$=18 ili $10+2b$=27. Za $10+2b$=18 dobijamo b=4, a za $10+2b$=27 slijedi da b nije prirodan broj. Dakle, važi a=5 i b=4, pa je traženi broj 5445.

846. Trouglovi CAN i BCM su jednakokraki, sl. 304, i slijedi $\sphericalangle ACN=\sphericalangle ANC=90^0-\frac{\alpha}{2}$, $\sphericalangle BCM=\sphericalangle BMC=90^0-\frac{\beta}{2}$. Kako je $\sphericalangle ACN+\sphericalangle BCM=90^0+\sphericalangle MCN$, to je $\sphericalangle MCN=90^0+90^0-\frac{\beta}{2}=90^0-45^0=45^0$.

847. (1) Iz uslova zadatka slijedi $\sphericalangle CAB$=100^0. Neka je $\triangle BOC$ jednakostranični nad stranicom BC, sl. 305. Kako je $\sphericalangle ABC+\sphericalangle CBO$=40^0+60^0, to je $\sphericalangle ABO$=100^0= $\sphericalangle OCA$. Dalje dobijamo $\sphericalangle OBD$=180^0–100^0=80^0 i $\sphericalangle OCA=\sphericalangle CAD$=100^0. Takođe, $OC=AD$ (jer je $AD=BC=OC$ pa zaključujemo da je $ADOC$ jednako-kraki trapez, pa važi $\sphericalangle ADO=\sphericalangle DOC=\frac{360^0-2\cdot110^0}{2}=80^0$, pa je $\sphericalangle DOC=20^0$. Iz jednakosti $\sphericalangle OBD$= $\sphericalangle ADO$, slijedi $OB=OD=OC$, te je O središte kružnice na kojoj se nalaze tačke B, C, D. Ugao DOB je centralni ugao nad tetivom BD i $\sphericalangle DCB$ je periferijski ugao nad tetivom BD. Takođe, važi $\sphericalangle DOB=2\sphericalangle DCB=\sphericalangle DCB$=10^0. Uglovi trougla ADC su: $\sphericalangle CAD$=100^0, $\sphericalangle ADC$=30^0, $\sphericalangle DCA$=50^0.



Sl. 304



Sl. 305

848. Kako je $1+x^2+x^4=(1+2x^2+x^4)-x^2=(1+x^2)^2-x^2=(1+x^2-x)(1+x^2+x)$ i $1+x+x^2=(x+1/2)^2+3/4>0$, još treba dokazati nejednakost $3(1+x^2-x)\geq 1+x+x^2$. Posljednja nejednakost je tačna jer je ekvivalentna sa $2(1-x)^2\geq 0$

849. Neka je $n=a^2+b^2+c^2$, gdje su a, b, c prirodni brojevi, od kojih je c najmanji. Tada je $n^2=(a^2+b^2+c^2)^2=a^4+b^4+c^4+2a^2b^2+2b^2c^2+2a^2c^2=(a^4+b^4+c^4+2a^2b^2-2b^2c^2-2a^2c^2)+4b^2c^2+4a^2c^2=(a^2+b^2-c^2)^2+(2bc)^2+(2ac)^2$. Kako je c najmanji od ta tri prirodna broja, to je $a^2+b^2-c^2$ prirodan broj pa je n^2 jednak zbiru kvadrata prirodnih brojeva $a^2+b^2-c^2$, $2bc$ i $2ac$.

850. Neka je P presječna tačka duži CK i AL, sl. 306. Kako je CP težišna duž na hipotenuzu AL pravouglog $\triangle ACL$ slijedi da je $PA=PC=PL$. Zbog toga je $\sphericalangle PCA=\sphericalangle PAC=\sphericalangle PAK=\frac{\alpha}{2}$. Tada je $\sphericalangle A=\alpha$, a kako je $\triangle CBK$ jednakokraki to slijedi $\sphericalangle B=\sphericalangle CKB=\sphericalangle ACK+\sphericalangle CAK=3\cdot\frac{\alpha}{2}$. Sada iz jednakosti $\sphericalangle A+\sphericalangle B=90^0$ i $3\cdot\frac{\alpha}{2}=90^0$, slijedi $\sphericalangle A=\alpha=36^0$ i $\sphericalangle B=54^0$.

851. Posmatrajmo jednu od $N=\frac{100\cdot 99}{2}=4950$ duži sa krajevima u datim tačkama. Ta duž može biti osnovica najviše dva jednakokraka trougla sa tjemenima u datim tačkama, jer bi u suprotnom simetrala te duži sadržavala bar tri date tačke. Dakle, broj jednakokrakih trouglova sa tjemenima u tim tačkama ne prelazi $2N<10000$.

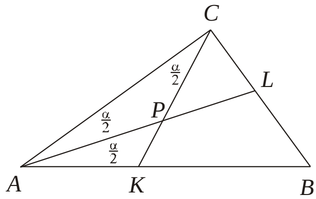
852. Kub ne može biti, jer ako je a kub, onda postoje prosti brojevi p_i, $1\leq i\leq k$, i prirodni brojevi α_i, $1\leq i\leq k$, tako da važi $a=\prod_{i=1}^{k}{p_i}^{3\alpha_i}$. Sada, broj djelilaca je $\prod_{i=1}^{k}(3\alpha_i+1)$ i to je broj oblika $3k+1$, a broj 2013 je djeljiv sa 3.

853. Jednačinu možemo transformisati u obliku $y(3x+2)=7$. Kako su x i y cijeli brojevi, a 7 prost broj postoje slijedeće mogućnosti:
1.) $y=1$, $3x+2=7$; 2.) $y=-1$, $3x+2=-7$;
3.) $y=7$, $3x+2=1$; 4) $y=-7$, $3x+2=-1$.
Direktnim provjeravanjem dobijamo da data jednačina ima cjelobrojna rješenja u drugom i četvrtom slučaju: $(-3,-1)$ i $(-1,-7)$.

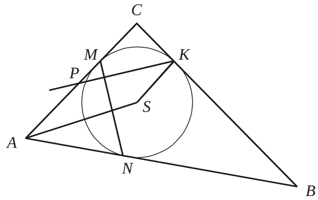
854. Neka je S centar upisane kružnice trougla ABC, sl. 307. $\triangle AMN$ je jednakokraki pa je prava AS istovremeno i simetrala ugla i visine MN. Zbog toga je SA normalna na MN. Prema uslovu zadatka i KP je normalna na MN pa je $KP\| SA$. Kako je SK normalna na BC slijedi da je $SK\| AC$. Dakle, četverougao $APKS$ je paralelogram pa je $AP=KS$. Kako je četverougao $KSMC$ kvadrat (sa stranicom jednakom poluprečniku upisane kružnice) konačno dobijamo da je $CK=KS=AP$.

855. $ab+bc+cd+da=b(a+c)+d(a+c)=(a+c)(b+d)\leq\frac{a+b+c+d}{2}=4028^2$. Jednakost važi za $a+c=b+d$, tj. $(a,b,c,d)=(2011,2013,2017,2015)$. Takođe, važi $ab+bc+cd+da=b(a+c)+d(a+c)=(a+c)(b+d)\leq\left(\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{b+d-a-c}{2}\right)\cdot\left(\frac{a+b+c+d}{2}-\frac{b+d-a-c}{2}\right)=\left(\frac{a+b+c+d}{2}\right)^2-\left(\frac{(b+d)-(a+c)}{2}\right)^2=4028^2-\left(\frac{(a+b+c+d)-2(a+c)}{2}\right)^2=4028^2-(4028-$

$(a+c))^2$. Izraz je minimalan kada je $a+c$ minimalno, a to se dostiže za $(a,b,c,d)=$ $(2011, 2015, 2013, 2017)$.



Sl. 306

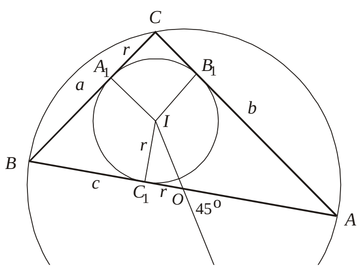


Sl. 307

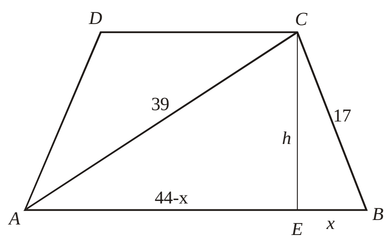
856. Neka je ABC dati trougao, pri čemu je $AB=c$ hipotenuza, a $BC=a$ i $AC=b$ su katete, $a\leq b$, sl. 308. Neka su dalje O i I centri opisane i upisane kružnice, r poluprečnik upisane kružnice, te A_1, B_1, C_1 dodirne tačke upisane kružnice sa stranicama a,b,c, redom. Tačka O je središte hipotenuze AB. Prema uslovima zadatka, $\triangle IOC_1$ je jednakokraki pravougli, pa je $OC_1=r$. Odatle je $BC_1=\frac{c}{2}-r$. Četverougao CA_1IB_1 je kvadrat, pa je $CA_1=r$, što zači da je $BA_1=a-r$. BA_1 i BC_1 su odsječci tangenti iz tačke B na upisanu kružnicu, pa je $BA_1=BC_1$, odakle je $\frac{c}{2}-r=a-r$, odnosno $c=2a$. Ovo važi ako je i samo ako je $\sphericalangle CAB=60^0$.

857. Svaka ekipa je odigrala 4 utakmice. Očito je ekipa sa jednim osvojenim bodom odigrala 1 neriješenu utakmicu i ostale 3 izgubila. Ekipa sa osvojena dva boda odigrala je 2 neriješene utakmice i 2 izgubila. Takođe, jedini način da ekipa u četiri utakmice osvoji pet bodova je da 1 utakmicu pobijedi, 2 utakmice odigra neriješeno i 1 utakmicu izgubi. Isto tako ekipa sa osam bodova morala je ostvariti 2 pobjede i 2 neriješene utakmice. Neka je peta ekipa ostvarila x pobjeda i y poraza. Kako je ukupan broj pobjeda jednak broju poraza dobijamo da je $0+0+1+2+x=3+2+1+0+y$; $x=y+3$. Kako je $x+y\leq 4$, slijedi da je $x=3$ i $y=0$. Dakle, peta ekipa je ostvarila 3 pobjede i 1 neriješen rezultata pa je osvojila 10 bodova.

858. Primjenom Pitagorine teoreme na trouglove BEC i ARC dobijamo (sl. 309) $h^2=17^2-x^2$; odnosno $h^2=39^2-(44-x)^2$, pa je $17^2-x^2=39^2-(44-x)^2$; $x=8\ cm$, a zatim izračunamo $h=15\ cm$. Kako je $2x=AB-CD$, dobijamo da je $CD=28\ cm$ pa je površina $P=540\ cm^2$.



Sl. 308



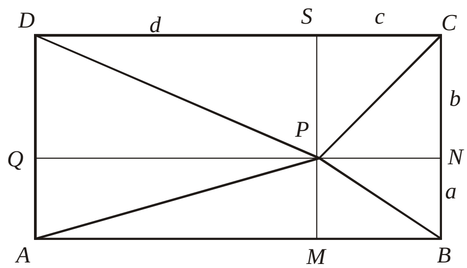
Sl. 309

859. Neka je $a<b<c$. Tada je $\frac{1}{a}>\frac{1}{b}>\frac{1}{c}$. Ako je $\frac{53}{60}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$, onda slijedi $\frac{53}{60}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}<\frac{1}{a}+\frac{1}{a}+\frac{1}{a}=\frac{3}{a}$ i $a\leq 3$. Razlikujemo tri slučaja: 1) a=1; 2) b=2 i c=3; 3) a=3, b=4 i c=5.
Direktnim provjeravanjem za date slučajeve dobijamo:
$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{11}{6}=\frac{110}{60}>\frac{53}{60}$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}=\frac{13}{12}=\frac{65}{60}>\frac{53}{60}$ i $\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}=\frac{47}{60}=\frac{65}{60}<\frac{53}{60}$
Dakle, ne postoje tri uzastopna cijela broja a, b, c takva da vrijedi data jednakost.

860. Neka je $BN=AQ=a$, $NC=QD=b$, $SC=MB=c$ i $AM=DS=d$, sl. 310. Tada je $a^2+d^2=49$; $a^2+c^2=4$; $b^2+c^2=36$ i $PD^2=b^2+d^2$. Sabiranjem prve i treće jednačine slijedi $a^2+b^2+c^2+d^2=85$. Kako je $a^2+c^2=4$, to je $a^2+d^2=81$, odnosno $PD=9\ cm$.

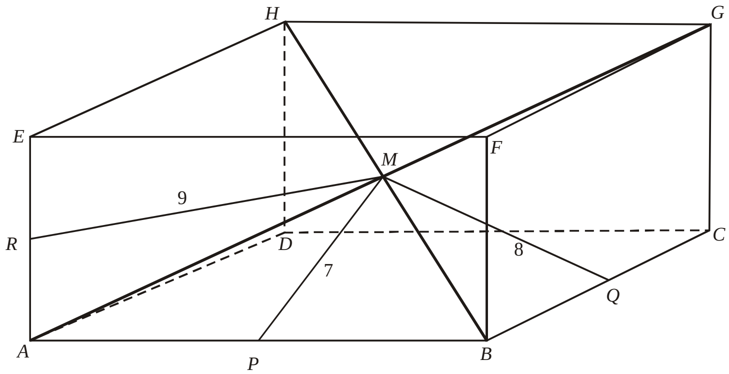
861. Prema uslovima zadatka je $n\neq 1$ pa važi $\frac{n^3-n^2+3}{n-1}=\frac{n^2(n-1)+3}{n-1}=n^2+\frac{3}{n-1}$. Da bi ovaj izraz bio cijeli broj mora i $n-1$ biti djelilac broja 3. To znači da $n-1\in\{-1,1,-3,3\}$, pa je $n\in\{0,2,-2,4\}$. Za ove vrijednosti cijelog broja n dobijamo skup vrijednosti datog izraza: $\{-3,7,3,17\}$.

862. Neka je x broj muškaraca, a y broj žena na ostrvu . Tada je, prema uslovima zadatka, $\frac{3}{4}x=\frac{3}{5}y$, odnosno $y=\frac{5}{4}x$. Na ostrvu nije u braku $\frac{1}{4}$ svih muškaraca i $\frac{2}{5}$ svih žena. Dio stanovništva koji nije u braku je količnik onih koji nisu u braku i ukupnog broja stanovnika:
$\left(\frac{1}{4}x+\frac{2}{5}y\right):(x+y)=\left(\frac{1}{4}x+\frac{2}{5}\cdot\frac{5}{4}x\right):\left(x+\frac{5}{4}x\right)=\left(\frac{3}{4}x\right):\left(\frac{9}{4}x\right)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$.



Sl. 310

863. Neka je $AB=a$, $BC=b$, $AE=c$, tačka M presjek dijagonala, d dijagonala kvadra i neka je $a>b>c$, sl. 311 Kako su kod kvadra dijagonale jednake i polove se to su trouglovi AMB, BMC i AME jednakokraki, pa su MP, MQ, i MR redom njihove visine, a to znači da su tačke P,Q i R sredine stranica a, b i c. Trouglovi MPB, MQB i MRA su pravougli čije su hipotenuze redom MB, MB i MA i jednake su polovini dijagonale pa je: $\frac{d^2}{4}=\frac{a^2}{4}+49$; $\frac{d^2}{4}=\frac{b^2}{4}+64$; $\frac{d^2}{4}=\frac{c^2}{4}+81$. Kako je $d^2=a^2+b^2+c^2$ to je $b^2+c^2=196$; $a^2+c^2=256$, $a^2+b^2=324$. Sabirajući prvu i treću jednačinu dobijamo $a^2+b^2+2c^2=452$, pa je, zbog $a^2+b^2=324$, $c=8\ cm$. Dalje, dobijamo
$a=8\sqrt{3}\ cm$, $b=2\sqrt{33}\ cm$, pa je $V=abc=384\sqrt{33}\ cm^3$.



Sl. 311

864. Kako je $x+\frac{1}{x}=3 \Leftrightarrow \left(x+\frac{1}{x}\right)^2=9 \Leftrightarrow x^2+\frac{1}{x^2}=7$, važi $\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)^2=49$, pa je $x^4+\frac{1}{x^4}=47$.

865. Prema uslovima zadatka je: $\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{25}}{25}=2{,}8 \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{25}=70$ i $\frac{x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{24}}{24}=2{,}78 \Leftrightarrow x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{24}=66{,}72$. Dakle, $x_{25}=(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{25})-(x_1+x_2+x_3+\cdots+x_{24})=70-66{,}72=3{,}28$.

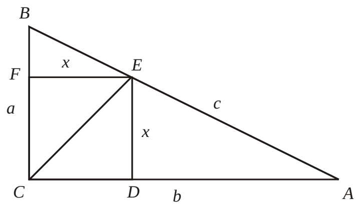
866. Velika kazaljka za 60 minuta opiše 360^0, a za 1 minutu ugao od 6^0. Mala kazaljka za 60 minuta opiše ugao od 30^0, a za 1 minutu ugao od $0{,}5^0$. U 5 časova velika imala kazaljka obrazuju ugao od 150^0. Za 12 minuta velika kazaljka opiše ugao od 72^0, a mala 6^0. Dakle, u 5 časova i 12 minuta velika i mala kazaljka obrazuju ugao od $150^0-72^0+6^0=84^0$.

867. $xy+y-3x=8 \Leftrightarrow xy+y-3x-3=5 \Leftrightarrow y(x+1)-3(x+1)=5 \Leftrightarrow (x+1)(y-3)=5$. Kako su x i y cijeli brojevi, postoje slijedeći slučajevi:

$x+1$	1	−1	5	−5
$y-3$	5	−5	1	−1
x	0	−2	4	−6
y	8	−2	−4	2

Dakle, rješenja ove jednačine su $(0, 8)$,$(-2,-2)$,$(4, 4)$ i $(-6, 2)$.

868. Neka je $\triangle ABC$ pravougli sa katetama $BC=a$, $AC=b$ i hipotenuzom $AB=c$, sl. 312. Neka je $CDEF$ kvadrat upisan u $\triangle ABC$ i neka je tačka E četvrto tjeme kvadrata $CDEF$, koje pripada hipotenuzi $AB=c$ pravouglog $\triangle AB$. Označimo sa x stranicu kvadrata.



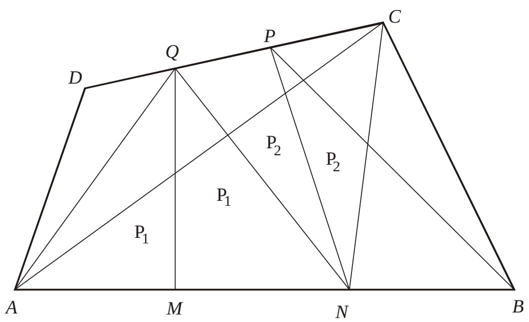
Sl. 312

Kako je $P_{ABC}=P_{ACE}+P_{BCE}$, važi:

$\frac{a\cdot b}{2}=\frac{b\cdot x}{2}+\frac{a\cdot x}{2} \Leftrightarrow a\cdot b = x\cdot(a+b) \Leftrightarrow x=\frac{a\cdot b}{a+b}$, pa je $P_{CDEF}=x^2=\left(\frac{a\cdot b}{a+b}\right)^2$. Neka je kateta b 50% duža od katete a, tada je $b=\frac{3a}{2}$, pa je $=\frac{a\cdot b}{a+b}=\frac{a\cdot\frac{3a}{2}}{a+\frac{3a}{2}}=\frac{3a}{5}$. Dalje važi $P_{ABC}=\frac{3a^2}{4}$ i $P_{CDEF}=\frac{9a^2}{25}$, pa je $P_{CDEF} : P_{ABC}=\frac{9a^2}{25}:\frac{3a^2}{4}=12:25=48:100$. Dakle, kvadrat zauzima 48% površine trougla.

869. $\frac{51}{19}=2+\frac{13}{19}=2+\frac{1}{1+\frac{6}{13}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{13}{6}}}=2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{6}}}$ te je $x=1$, $y=2$, $z=6$.

870. Trouglovi AMQ i MNQ (sl. 313) imaju jednake stranice AM=MN i jednake visine koje im odgovaraju pa su im i površine jednake; P_1. Isto važi i za trouglove CPN и PQN, pa i oni imaju jednake površine; P_2. Dakle, površine četverougla $MNPQ$ jedanka je zbiru P_1+P_2: $P_{MNPQ}=P_1+P_2$.



Sl. 313

Kako $\triangle AQD$ ima tri puta manju stranicu od $\triangle ACD$, a odgovarajuće visine su im jednake i važi $P_{AQD}=\frac{1}{3}\cdot P_{ACD}$. Slično, $P_{BCN}=\frac{1}{3}\cdot P_{ABC}$. Dakle, $P_{AQD}+P_{BCN}=\frac{1}{3}\cdot P_{ACD}+\frac{1}{3}\cdot P_{ABC}=\frac{1}{3}\cdot P_{ABCD}=\frac{1}{3}\cdot 1=1$. Na osnovu ovoga dobijamo P_{ANCQ}=2, tj. $2P_1+2P_2=2$, odnosno $P_1+P_2=1$.

871. Neka je $\overline{xyz}=100x+10y+z$ dati trocifreni broj. Zamjenom cifara jedinica i desetica dobijamo broj $\overline{xzy}=100x+10z+y$. Iz uslova zadatka važi: $100x+10y+z+45=100x+10z+y=0$. (1). Ako cifre stotica i desetica zamijene mjesta dobijamo broj: $\overline{yxz}=100y+10x+z$, a iz uslova zadatka važi $100x+10y+z-270=100y+10x+z$, odnosno $x-y-3=0$. (2). Sabiranjem jednakosti (1) i (2) dobijamo $x-z=-2$ (3). Ako cifre stotica i jedinica zamijene mjesta dobijamo broj: $\overline{zyx}=100z+10y+x$. Tada je $\overline{xyz}-\overline{zyx}=(100x+10y+z)-(100z+10y+x)=99\cdot(x-z)=99\cdot(-2)=-198$. Znači, dati broj će se povećati za 198, ako cifre stotica i jedinica zamijene mjesta.

872. Ako je kada začepljena, nakon 1 minute punjenja u njoj će biti $\frac{1}{20}$ zapremine kade. Prema tome, za 48 minuta iz slavine će isteći vode čija je količina jednaka $48\cdot\frac{1}{20}=\frac{12}{5}$ zapremine kade. Ako odvodni čep u kadi nije zatvoren, za 1 minutu iz kade će isteći količina vode koja je jednaka $\frac{1}{30}$ zapremine kade. Za 48 minuta iz kade će isteći $48 \cdot \frac{1}{30} = \frac{8}{5}$ zapremine kade. Kako je $\frac{12}{5} - \frac{8}{5} = \frac{4}{5}$ zaključujemo da se za 48 minuta nakon puštanja vode u kadi nalazi vode koja je jednaka $\frac{4}{5}$ zapremine kade, štoznači da Marko nije presuo kadu.

873. Ako je traženi trocifreni prirodni broj $\overline{abc} = 100a + 10b + c$, onda odnos broja $\overline{abc}$ i zbira njegovih cifara: $\frac{100a+10b+c}{a+b+c} = \frac{10a+10b+10c+90a-9c}{a+b+c} = 10 + 9 \cdot \frac{90a-9c}{a+b+c} = 10 + 9 \cdot \frac{a\cdot\left(10-\frac{c}{a}\right)}{a\cdot\left(1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\right)} = 10 + 9 \cdot \frac{10-\frac{c}{a}}{1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}}$. Ovaj izraz je najmanji ako je $\frac{b}{a} + \frac{c}{a} = \frac{b+c}{a}$ najveći. Izraz $\frac{b+c}{a}$ je najveći ako je b+c maksimalno, a a minimlno. Kako su u pitanju cifre, onda je b=c=9, a=1. Traženi broj je 199.

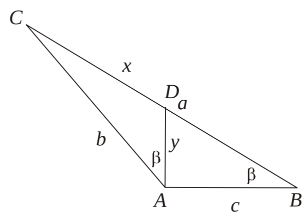
874. Označimo sa r i H poluprečnik baze i visinu datog valjka, redom, a sa r_1 i H_1 poluprečnik baze i visinu novodobijenog valjka. Iz uslova zadatka slijedi: $r_1=3r$, $H_1 = \left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot H$, pa je $V_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot V \Leftrightarrow {r_1}^2\pi H_1 = \left(1 + \frac{p}{100}\right) r^2\pi H \Leftrightarrow$ $9r^2\pi\left(1 - \frac{p}{100}\right) \cdot H = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \cdot r^2\pi H \Leftrightarrow 9\left(1 - \frac{p}{100}\right) = \left(1 + \frac{p}{100}\right) \Leftrightarrow p = 80\%$.
Označimo sa površinu omotača polaznog valjka, a sa površinu omotača novodobijenog valjka. Tada je $\frac{M_1}{M} = \frac{2r_1\cdot\pi\cdot H}{2r\cdot\pi\cdot H} = \frac{3r\cdot\left(1-\frac{p}{100}\right)\cdot H}{r\cdot H} = 3 \cdot \left(1 - \frac{80}{100}\right) = 0{,}6$.
Dakle, površina omotača se smanjila za 40%.

875. Neka su x i y traženi brojevi. Prema uslovima zadatka je xy=10(x+y). Odavde dobijamo xy–10x–10y=0. Ako dodamo lijevoj i desnoj stranijednačine broj 100, dobijamo xy–10x–10y+100=100, odnosno (x–10)(y–10)=100. Kako su x и y prirodni brojevi postoje slijedeći slučajevi, koje ćemo prikazati tabelom:

x – 10	1	2	4	5	10
y – 10	100	50	25	20	10
x	11	12	14	15	20
y	110	60	35	25	20

Traženi parovi brojeva su: 11 i 100; 12 i 60; 14 i 35; 15 i 25; 20 i 20.

876. Kako je $\alpha - \beta = 90^0$; $\alpha = 90^0 + \beta$, to znači da je $\triangle$ ABC tupougli, sl. 314. Na stranici BC konstruišemo tačku D, tako da je $\sphericalangle BAD = 90^0$ i neka je $CD = x$ i $AD = y$. Kako je $\alpha = 90° + \beta$, slijedi da je $\sphericalangle CAD=\beta$. Trouglovi ACD i ABC su slični, jer imaju jednake uglove: $\Delta ACD \sim \Delta ABC$. Na osnovu ove sličnosti slijedi BC:AC=AC:CD i BC:AB=AC:AD. Iz prve proporcije dobijamo 20:15=15:x;



Sl. 314

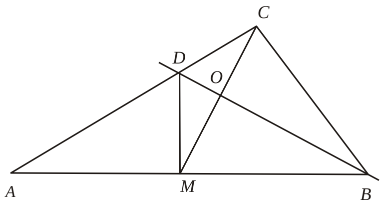
$x = \frac{45}{4}$, pa je $BD = 20 - \frac{45}{4} = \frac{35}{4}$. Iz druge proporcije slijedi 20:c = 15:y; $y = \frac{3}{4}c$.
Dalje, iz $\triangle ABD$, primjenom Pitagorine teoreme, slijedi $\left(\frac{35}{4}\right)^2 = c^2 + \left(\frac{3}{4}c\right)^2$; c=7.

877. Prvo ćemo izračunati koliko tih brojeva možemo napisati. Cifru hiljada možemo izabrati na 5 načina. Nakon što smo izabrali cifru hiljada, cifru stotica možemo izabrati između 4 preostale cifre, na 4 načina. Cifru desetica možemo izabrati između 3 preostale cifre, na 3 načina, a cifru jedinica na 2 načina. Prema tome, tih brojeva ima $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$. Sada ćemo odrediti njihov zbir. Ako odaberemo jednu cifru, npr. 1, pa je napišemo na mjestu jedinica, onda takvih brojeva ima 24. Slično, 24 broja imaju cifru 1 na mjestu desetica, 24 na jestu stotica i 24 na mjestu hiljada. Isto to važi i za ostale cifre, tj. za cifre 2, 3, 4 ili 5. Dakle, svaka od cifra nalazi se na svakom od dekadnih mjesta (hiljada, stotica, desetica i jedinica) tačno 24 puta. To znači da zbir svih tih 120 brojeva ima $24\cdot 1+24\cdot 2+24\cdot 3+24\cdot 4+24\cdot 5=360$ jedinica, isto toliko desetica, stotica i hiljada. Zato je zbir jednak $360\cdot 1000+360\cdot 100+360\cdot 10+360\cdot 1=360\cdot(1000+100+10+1)=360\cdot 1111=399960$.

878. Kako je $xy+x+y+1=2015$, tj. $(x+1)(y+1)=5\cdot 13\cdot 31$, to važi:

1) $x+1=5$, $y+1=403$, pa je $x=4$, $y=402$;
2) $x+1=13$, $y+1=155$, pa je $x=12$, $y=154$;
3) $x+1=31$, $y+1=65$, pa je $x=30$, $y=64$;
4) $x+1=65$, $y+1=31$, pa je $x=64$, $y=30$;
5) $x+1=155$, $y+1=13$, pa je $x=154$, $y=12$;
6) $x+1=403$, $y+1=5$, pa je $x=402$, $y=4$.

879. *a*) Neka pored broja 16 piše neki broj x od preostalih 15 brojeva. Tada važi: $16<16+x\leq 31$. Kako je $16+x=a^2$, to mora biti $a^2=25$, pa je $x=9$.
b) Mogu. Primjer: 16, 9, 7, 2, 14, 11, 5, 4, 12, 13, 3, 6, 10, 15, 1, 8 .



Sl. 315

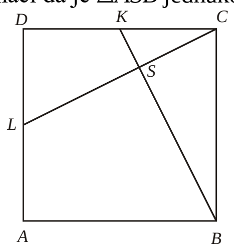
880. Neka je tačka M sredina stranice AB i tačka D presjek simetrale unutrašnjeg ugla kod B sa stranicom AC, tada je CM težišna duž iz tjemena C, a BD simetralna duž ugla kod tjemena B, sl. 315. Označimo presjek duži CM i BD sa O. Kako je duž CM normalna na BD i $\sphericalangle MBO\cong\sphericalangle CBO$ slijedi da je $\triangle MBO\cong\triangle CBO$ (na osnovu stava USU) pa je $MB=BC$ Kako je $\sphericalangle DAM\cong\sphericalangle ABD$ to je $AD=BD$ pa je DM visina jednakokrakog $\triangle ABD$, te na osnovu toga imamo da je $\sphericalangle DMB=90°$. Na osnovu svega ovoga slijedi da je je $\triangle DMB\cong\triangle DBC$ (na osnovu stava SUS), a to znači da je $\sphericalangle BCD=90°$, pa je $\triangle ABC$ pravougli. Na osnovu uslova zadatka da je ugao kod B dva puta veći od ugla kod A dobijamo da su uglovi ΔABC jednaki 30°, 60° и

90°. Kako je $\triangle ABC$ pravougli sa uglovima 30°, 60° и 90° on je polovina jednakostraničnog trougla pa su stranice AB=6 i $AC = 3\sqrt{3}$. Na osnovu toga je obim: $O_{ABC} = 6 + 3 + 3\sqrt{3}$, a površina je $P = \frac{3\cdot 3\sqrt{3}}{2} = \frac{9\sqrt{3}}{2}$.

881. Posmatrajmo razliku:
$(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2=(b^2+c^2-a^2-2bc)(b^2+c^2-a^2+2bc)=((b-c)^2-a^2)^2((b+c)^2-a^2)=$ $(b-c-a)(b-c+a)(b+c-a)(b+c+a)$. Kako su a, b, c stranice trougla slijedi da je izraz u prvoj zagradi negativan, a svi ostali su pozitivni pa je taj proizvod negativan i važi $(b^2+c^2-a^2)^2-4b^2c^2<0$ ili $(b^2+c^2-a^2)^2<4b^2c^2$, što je trebalo i dokazati.

882. Kako je $2013^{2014} - 2013 = 2013 \cdot (2013^{2013} - 1) = 3 \cdot 11 \cdot 62 \cdot (2013^{4\cdot 503} - 1)$, to je dati broj djeljiv sa 33, a broj $(2013^{2013} - 1)$ je djeljiv sa 2, jer se broj 2013^4 završava cifrom 1, pa se i broj $2013^{4\cdot 503}$ završava cifrom 1. Kako je jedan činilac djeljiv sa 33, a drugi sa 2 i slijedi da je njihov proizvod djeljiv sa 66.

883. $\triangle BKC \cong \triangle CLD$ (kao pravougli sa jednakim katetama, sl. 316), pa iz te podudarnosti slijedi da je $\sphericalangle BKC \cong \sphericalangle CLD$. Dakle, važi $\sphericalangle SKC+\sphericalangle KCS = \sphericalangle BKC+\sphericalangle DCL=$ $\sphericalangle CLD+\sphericalangle DCL$=90°, odakle je $\sphericalangle KSC$=90°, to jest $\sphericalangle LSB$=90°. Kako je $\sphericalangle BAL+$ $\sphericalangle BSL$=180°, onda je i $\sphericalangle ALS+\sphericalangle ABS$=180°, pa je četverougao $ABSL$ tetivni. Dalje važi $\sphericalangle ASB \cong \sphericalangle ALB$ (kao periferijski ugao nad istom tetivom), a $\sphericalangle$CKB$\cong\sphericalangle KBA$ (uglovi sa paralelnim kracima). Kako je i $\triangle BKC \cong \triangle BAL$ (pravougli sa jednakim katetama) imamo da je $\sphericalangle ALB \cong \sphericalangle BKC$ Na osnovu ovih jednakosti uglova imamo da je $\sphericalangle ASB \cong \sphericalangle ABS$, a to znači da je $\triangle ASB$ jednakokraki, što je i trebalo dokazati.



Sl. 316

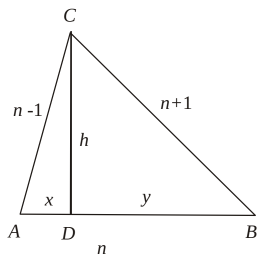
884. Neka su $\overline{xyz}$ traženi brojevi. Tada važi: $100x+10y+z=15(x+y+z)$, odnosno $85x=5y+14z$. kako su brojevi $85x$ и $5y$ djeljivi sa 5 to mora i $14z$ biti djeljivo sa 5, odnosno z mora biti djeljivo sa 5. Kako je broj z cifra to postoje 2 slučaja: ili je z=0 ili je z=5. Ako je z=0, onda je $85x=5y$, odnosno $y=17x$, a ova jednačina nema rješenja jer su x i y cifre. Ako je z=5 onda je $85x=5y+14\cdot 5$, tj. $17x=y+14$. Rješenje ove jednačine je x=1 i y=3, a to znači da je jedini traženi broj 135.

885. Kako je $a^4+a^2b^2+b^4=(a^2+b^2)^2-a^2b^2=(a^2+b^2-ab)(a^2+b^2+ab)$, slijedi $a^2-ab+b^2=2$. Ako jedna-kost $a^2-ab+b^2=2$ saberemo sa $a^2+ab+b^2=4$, tada je $a^2+b^2=3$, a ako $a^2-ab+b^2=2$ oduzmemo od $a^2+ab+b^2=4$. Tada je ab=1. Dalje, na osnovu dobijenog važi:

$a^6+a^3+b^3+b^6=(a^2)^3+(b^2)^3+a^3b^3=(a^2+b^2)(a^4-a^2b^2+b^4)+a^3b^3=$
$(a^2+b^2)((a^2+b^2)^2-3a^2b^2)+(ab)^3=3\cdot(3^2-3)+1^3=19.$

886. Pretpostavimo da bi jedan traktor mogao preorati prvo polje za x časova, a drugo polje za y časova. Tada imamo sistem jednačina:
$\frac{x}{3}+\frac{y}{2}=12$ i $\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{x}{3}+\frac{y}{3}\right)+\frac{x}{2}+\frac{y}{2}=20$. Množeći ove jednačine sa 6 dobijamo sistem $2x+3y=72$ i $4x+4y=120$. Rješenja ovog sistema su $x=18$ i $y=12$. Znači da bi dva traktora obradili prvo polje za 9 časova.

887. Neka je ABC dati trougao čije su dužine stranica tri uzastopna broja i neka je $AC < AB < BC$, sl. 317. AB je srednja po veličini stranica $\triangle ABC$, a h je visina koja joj odgovara. Podnožje visine h je tačka D, koja stranicu AB dijeli na odsječke x i y. Označimo dužine stranica trougla AC, AB i BC, redom, sa $n-1$, n i $n+1$. Tada je $x+y=n$. Iz pravouglih trouglova ACD i BCD slijedi $h^2=(n-1)^2-y^2$, odnosno $h^2=(n+1)^2-x^2$. Eliminacijom veličine h dobijamo jednačinu $(n-1)^2-y^2=(n+1)^2-x^2$, odakle imamo da je $x^2-y^2=(n+1)^2-(n-1)^2$ ili $(x-y)(x+y)=4n$. Kako je $x+y=n$ dobijamo da je $x-y=4$ što je i trebalo dokazati.



Sl. 317

888. Datu jednačinu možemo transformisati na slijedeći način:
$\sqrt{(x-2)^2}-\sqrt{(2x+3)^2}=-1$, odnosno $|x-2|-|2x+3|=-1$.
Za $x\in\left(-\infty,-\frac{3}{2}\right)$, rješenje je $x=-6$; za $x\in\left[-\frac{3}{2},2\right)$, rješenje je $x=0$, a za $x\in[-2+\infty)$ data jednačina nema rješenje. Skup rješenja je $R=\{-6,0\}$.

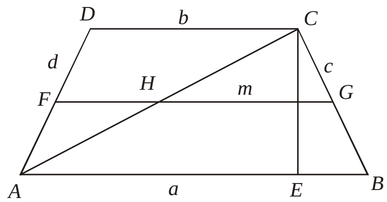
889. Podijelimo te brojeve u grupe tako da istoj grupi pripadaju brojevi koji pri dijeljenju sa 2014 daju ostatke 0, 1, 2, 3, ... , 2012, 2013. Kako ovih grupa ima 2014, a brojeva 2015 to prema Dirihleovom principu bar dva broja moraju pripadati istoj grupi, to jest pri dijeljenju sa 2014 daju isti ostatak, a to znači da im je razlika djeljiva sa 2014.

890. Srednja linija trapeza je $m=\frac{a+b}{2}$. Kako je je $m=11\ cm$, dobijamo da je $a+b=22cm$, sl. 318. Trapez je jednakokraki te je $c=d$, pa je obim trapeza $0=a+b+2c=34\ cm$. Iz uslova da je kraća osnovica dva puta duža od jednog odsječka srednje linije dobijamo da je $b=8\ cm$ i $a=14\ cm$. Duž $EB=\frac{a-b}{2}=3\ cm$. Duž CE je visina trapeza pa je $\triangle EBC$ pravougli i jednak polovini jednakostraničnog trougla čija je stranica 6 cm. Dakle, uglovi na dužoj osnovici a su 60°, a na kraćoj b su 120°.

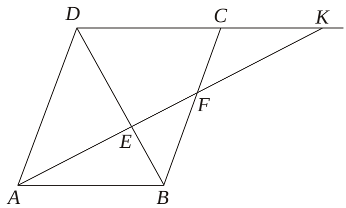
891. Datu jednačinu možemo transformisati na slijedeći način:
$x^2+2x+1+y^2-6y+9=0$, odnosno $(x+1)^2+(y-3)^2=0$. Iz ove jednačine dobijamo rješenja: $x=-1$ i $y=3$, pa je: $(-1)^{2015}+(3-2)^{2015}=-1+1=0$.

892. Neka je x broj godina kćerke. Tada, prema uslovima zadatka, dobijamo jednačinu $26+x+x+8=60$, čije rješenje je $x=13$. Dakle, kćerka ima 13 godina. Kako se kćerka rodila 5 godina prije sina to znači da je majka rodila sina u 31. godini.

893. Nejednačina je ekvivalentna sa nejednačinom $\sqrt{(2x-1)^2} < 3 - x$, odnosno nejednačinom $|2x-1| < 3 - x$. Riješimo ovu nejednačinu:
a) Za $x \ge \frac{1}{3}$ data nejednačina je oblika $2x - 1 < 3 - x$, skup rješenja je $x < \frac{4}{3}$, pa je, zbog $x \ge \frac{1}{2}$, skup rješenja $x \in [\frac{1}{2}, \frac{4}{3})$. Slično, za $x < \frac{1}{2}$, važi $-2x + 1 < 3 - x$, čiji je skup rješenja $x > -2$, pa je zbog, $x < \frac{1}{2}$, $x \in \left(-2, \frac{4}{3}\right)$. Dakle, rješenje nejednačine $\sqrt{4x^2 - 4x + 1} < 3 - x$ je interval $x \in \left(-2, \frac{4}{3}\right)$.



Sl. 318



Sl. 319

894. Množenjem datog izraza sa 2 dobijamo $2A=2+2^2+2^3+2^4+...+2^{2015}+2^{2016}$, pa je $2A-A=2^{2016}-1$, tj. $A=2^{2016}-1$. Kako je 2016 djeljiv sa 4, a broj 2 stepenovan sa 4 se završava cifrom 6, pa se i broj 2^{2016} završava cifrom 6 i nakon oduzimanja broja 1 dobijamo da se broj $A=1+2+2^2+2^3+...+2^{2014}+2^{2015}$ završava cifrom 5

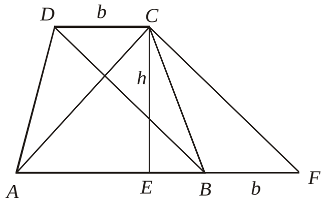
895. Zapremina kocke je $V=13\cdot13\cdot13=2197\ dm^3$. Kako kocka sira ima 2015 crva to na osnovu Dirihleovog principa postoji bar jedna kocka sira zapremine 1 dm^3 unutar koje se ne nalazi nijedan crv.

896. Kako je $AB||CD$, sl. 319, trouglovi ABE i EKD su slični pa je $AE : EK = BE : DE$ (1). Takođe, trouglovi BEF i EDA su slični, jer je $AD||BF$, pa je $EF : AE = BE : DE$ (2). Iz proporcija (1) i (2) slijedi $AE : EK = EF : AE$, odnosno $AE^2=EK\cdot EF$, pa je $AE = \sqrt{EF \cdot EK}$.

897. Važi $(p-1)\cdot(p+q)=2\cdot165$. Kako su brojevi p i q ili oba parna ili oba neparna ili jedan paran, a jedan neparan. U svakom od ovih slučajeva zbir i razlika tih brojeva je iste parnosti što znači da su brojevi $p-q$ i $p+q$ ili oba parna ili oba neparna. Kako je njihov proizvod 330 paran broj, to znači da moraju biti oba parna. Ali, ako su oba parna, onda je njihov proizvod djeljiv sa 4, a 330 nije djeljiv sa 4. Dakle, takvi brojevi ne postoje.

898. Ako je broj djeljiv i sa 9 i sa 11 onda je on djeljiv i sa 99. Razlika dva broja je djeljiva sa 99 ako ti brojevi pri djeljenju sa 99 imaju iste ostatke. Pri djeljenju sa 99 mogu se dobiti ostaci 0, 1, 2, 3, … ,97, 98. Znači da sve brojeve po ovom osnovu možemo razvrstati u 99 klasa. Kako imamo 100 brojeva, a 99 klasa, to po Dirihleovom principu, postoje 2 broja u istoj klasi tj. dva broja koji pri djeljenju sa 99 daju iste ostatke, tj. da im je razlika djeljiva sa 99.

899. Površina trapeza je $P = \frac{a+b}{2} \cdot h$, pa prema uslovu zadatka je $h^2 = \frac{a+b}{2} \cdot h$, a odavde dobijamo da je $a + b = 2h$. Izaberimo na produžetku duži AB tačku F takvu da je $BF = CD = b$, sl. 320. Tada je četvorougao $BFCD$ paralelogram, pa je $BD = FC$ i $AF = a + b$. Dijagonale jednakokrakog trapeza su jednake, pa je $\triangle$ AFS jednakokraki i podnožje E visine SE je sredina duži AF. Kako je $a+b=2h=AF$, to je $AE = SE = h$. Kako je $\triangle$ AES pravougli i jednakokraki slijedi da je $SAE=45^0$, pa je i $\sphericalangle AFS=45^0$. Odavde slijedi da je $\sphericalangle ASF=90^0$. Kako je $BD||FC$, slijedi da se dijagonale sijeku pod uglom od 90^0.



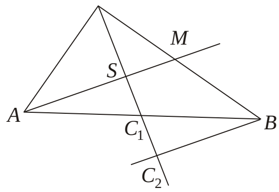
Sl. 320

900. $2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015+1=(2014-2) \cdot (2014-1) \cdot 2014 \cdot (2014+1)+1=$
$=(2014^2-2014-2) \cdot (2014^2-2014)+1$. Uvedimo oznaku $2014^2-2014=a$, pa je:
$2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015+1=(a-2) \cdot a+1=a^2-2a+1=(a-1)^2$;
$2012 \cdot 2013 \cdot 2014 \cdot 2015+1=(2014^2-2015)^2$.

901. *a*) Kako je: $S_n=a_1+a_2+a_3+...+a_{n-1}+a_n$ i $S_n=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+...+a_2+a_1$, to sabiranjem ovih jednakosti dobijamo:
$2S=(a_1+a_n)+(a_2+a_{n-1})+(a_3+a_{n-2})+...+(a_{n-1}+a_2)+(a_n+a_1)$.
Svi sabirci u zagradama su jednaki a_1+a_n, a ima ih n, pa je $2Sn=n \cdot (a_1+a_n)$, odnosno $S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + a_n)$, tj. $S_n = \frac{n}{2} \cdot (a_1 + (n-1)d)$.
b) Razlika kvadrata dva uzastopna prirodna broja n i $n-1$ jednaka je $2n-1$. U ovom slučaju imamo 1007 parova takvih brojeva: 2015^2-2014^2, 2013^2-2012^2,..., 5^2-4^2, 3^2-2^2 i još broj 1. Tako smo dobili niz od 1008 brojeva, (svaka dva „sabirka“ daju jedan član niza) sa osobinom da je: prvi član $a_1=1$, drugi $a_2=3^2-2^2=5$, treći $a_3=5^2-4^2=9$,..., hiljadu i osmi $a_{1008}=2015^2-2014^2=4029$. Kod ovog niza je $a_1=1$ i $d=a_n-a_{n-1}=((n+3)^2-(n+2)^2-((n+1)^2-n^2)=4$, pa koristeći formule pod a) važi:
$2015^2-2014^2+2013^2-2012^2+...+5^2-4^2+3^2-2^2+1=1+5+9+...+4029=$
$\frac{1008}{2} \cdot (1 + 4029) = 2\,031\,120$.

902. Ako je x cijena jednog metra platna prije sniženja, tada se za 26 KM moglo kupiti $\frac{26}{x}$ metara platna. Poslije sniženja cijena je $\frac{80}{100} \cdot x=\frac{4}{5} \cdot x$, pa se za 24 KM moglo kupiti $24:\frac{4}{5} \cdot x = \frac{30}{x}$ metara platna. Prema uslovu zadatka je $\frac{30}{x} - \frac{36}{x} = 1$, pa je $x=4$. Cijena prije sniženja je iznosila 4 KM, a poslije sniženja od 20% cijena je 3,2 KM po metru.

903. Nacrtajmo pravu paralelnu sa AM koja sadrži tačku B i neka je presjek ove prave sa pravom CC_1 tačka C_2, sl. 321. Tada je $\triangle AC_1S \cong \triangle BC_1C_2$ (stav USU), pa je $C_2C_1=C_1S$. Na osnovu Talesove važi $CM : MB = CS : 2SC_1$. Odosno, $CS : 2SC_1 = 2015 : 2014$, a to znači da je $CS : SC_1 = 2015 : 1007$.



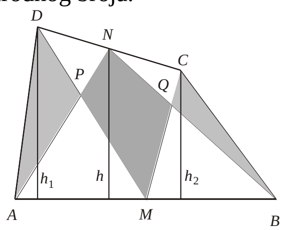
Sl. 321

904. Neka je x broj kocki ivice 1 cm, y broj kocki ivice 2 cm i z broj kocki ivice 3 cm. Tada imamo sistem jednačina $x+8y+27=13^3$ i $x+y+z=2015$. Oduzimajući drugu jednačinu od prve dobijamo $7y+26z=182$

a) Iz ove jednačine slijedi da je $0 \leq z \leq 7$. Provjerom dolazimo do rješenja $z=7$ i $y=0$ ili $y=26$ i $z=0$. Ne može se izvršiti takva podjela.

905. Označimo, redom, sa h, h_1 i h_2 visine trouglova ABN, AMD i MBC, sl. 322. Visina h je srednja linija trapeza čije su osnovice h_1 i h_2, pa je $h_1+h_2=2h$. Neka je AB=a. Tada je: $P_{AMD} + P_{MBC} = \frac{1}{2} \cdot AM \cdot h_1 + \frac{1}{2} \cdot MB \cdot h_2 = \frac{1}{4} \cdot a \cdot h_1 + \frac{1}{4} \cdot a \cdot h_2 = \frac{a}{4} \cdot (h_1 + h_2) = \frac{a}{4} \cdot 2h = P_{ABN}$. Dakle, $P_{AMD}+P_{MBC}=P_{ABN}$. Ako ovim jednakim površinama oduzmemo zajedničke dijelove (trouglove AMR i MVQ) preostali dijelovi takođe imaju jednake površine, pa je $P_{APD}+P_{BCQ}=P_{MNPQ}$.

906. Dati broj je djeljiv sa 3 jer mu je zbir cifara jednak $2015 \cdot (1+2) = 2015 \cdot 3 = 6045$, a on je djeljiv sa 3.Kako broj 6045 nije djeljiv sa 9 slijedi da ni dati broj nije djeljiv sa 9. Kako je dati broj djeljiv sa 3, a nije djeljiv sa 9 to znači da on nije kvadrat nekog prirodnog broja.



Sl. 322

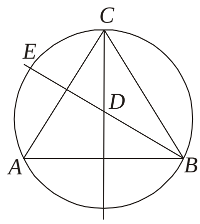
907. *a*) Da bi bile sigurno izvučene tri kuglice iste boje moramo izvući najmanje 7 kuglica jer ako su među izvučenim po dvije kuglice istih boja onda izvlačenjem slijedeće kuglice nastaje siguran događaj, tj. dobijamo tri kuglice iste boje.

b) Da bi među izvučenim kuglicama bile sigurno tri kuglice različitih boja moramo izvući sve kuglice kojih ima najviše, a to su bijele, zatim sve kuglice kojih je ostalo najviše, a to su plave, a zatim izvlačenjem još jedne kuglice dolazimo do sigurnog događaja, što znači da moramo izvući 4030 kuglica.

908. Kako su svi učenici imali različit broj tačnih odgovora, najmanji mogući broj tačnih odgovora, ukupno, je $0+1+\cdots+19=190$. Pošto je na svako pitanje odgovoreno najviše 3 puta, broj pitanja je sigurno veći od $190/3>63$.

909. „Niz“ cifara 2015 pojavljuje se 13 puta kao dio sljedećih brojeva: 2015, 12015, 22015 i 20150, 20151,..., 20159. „Niz“ cifara 2015 može se pojaviti i kao kraj jednog broja i početak sljedećeg. Imamo sljedeće mogućnosti:
1) 2|015; ne može se pojaviti, jer nijedan prirodan broj ne počinje nulom.
2) 20|15; pojavljuje se 11 puta: 1520|1521 i 15020|15021, 15120|15121,..., 15920|15921.
3) 201|5; pojavljuje se jednom: 5201|5202.
Očigledno, broj 2015 se ne može pojaviti kao kombinacija tri uzastopna broja. Dakle, cifre 2,0,1,5 se pojavljuju uzastopno ukupno 25 puta.

910. $\sphericalangle AEB = \sphericalangle ACB = \gamma$, $\sphericalangle BEC = \sphericalangle BAC = \alpha$, periferijski uglovi nad istim lukom, sl. 323. Iz istog razloga je $\sphericalangle EAC = \sphericalangle EBC = \beta/2$, $\sphericalangle ECA = \sphericalangle EBA = \beta/2$. Tada je $\sphericalangle ECA = \sphericalangle EAC$, odakle je $EA = EC$. Kako je $\sphericalangle ADE$ spoljašnji ugao $\triangle ADB$ važi $\sphericalangle ADE=(\alpha+\beta)/2$. Takođe, $\sphericalangle EAD=\sphericalangle EAC+\sphericalangle DAC=(\alpha+\beta)/2$, pa je $EA=ED$, tj. $EA = EC=ED$, što znači da je tačka E centar opisanog kruga trougla ACD.



Sl. 323

911. Transformacijom dobijamo da je: $p+q=2(p-q)^2$. Razmotrićemo tri slučaja:
1) $p\geq 5$.
Jasno je da p i q daju ostatke 1 ili 2 pri deljenju sa 3. Ako daju iste ostatke, onda je $p-q$ djeljiv sa 3, a $p+q$ nije. Ako daju različite ostatke, tada je $p+q$ je djeljiv sa 3, a $p-q$ nije, pa ni u jednom od ova dva slučaja nemamo rješenja.
2) $p=3$.
Jasno je da zbog uslova $p<q$, mora biti $q\geq 5$. Dobijamo jednačinu $2q^2-13q+15=0$, čije je jedno rješenje $q=5$, dok za $q>5$, važi $2q^2-13q+15=q(2q-13)+15\geq 7\cdot 1+15=22>0$, pa jednačina nema rješenja.
3) $p=2$
Zbog $p<q$, slijedi da je q neparan. Međutim, na lijevoj strani imamo neparan broj, a na desnoj paran, pa u ovom slučaju nemamo rješenja.
Dakle, jedino rješenje: $p=3$, $q=5$.

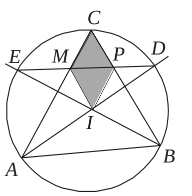
912. Iz $a+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{a}$ slijedi $c=\frac{a^2b+a-b}{ab}$, odakle je $a^2b+a-b=abc$ (1). Primjetimo da, zbog uslova zadatka, $a, b, c\neq 0$, lijeva strana u poslednjoj jednakosti je različita od nule. Iz $a+\frac{1}{b}=c+\frac{1}{a}$ slijedi $a-b=\frac{1}{c}-\frac{1}{b}$; $a-b=\frac{ab}{a^2b+a-b}$, odakle dobijamo da je $a^2b+a-b=-\frac{ab+1}{b}=-S$ (2). Iz (1) i (2) slijedi da je S$=-abc$.

913. Očigledno, razdaljina između ovih mjesta u kilometrima ne može biti jednocifren broj. Takođe, razdaljina u kilometrima ne može biti broj sa tri ili više cifara, jer bi u tom slučaju postojala tabla sa zbirom cifara većim od 13. Slijedi da je razdaljina između ovih mjesta izražena dvocifrenim brojem kilometara. Na rastojanju 9 kilometara od mjesta A, sa jedne strane table je broj 9, a sa druge strane broj koji nema više od dve cifre i čiji je zbir cifara 4 Stoga, mogućnosti za broj sa druge strane table su brojevi: 4, 13, 22, 31 i 40. Provjerom utvrđujemo da jedino 40 zadovoljava uslove zadatka, pa je razdaljina između ovih mjesta 49 kilometara.

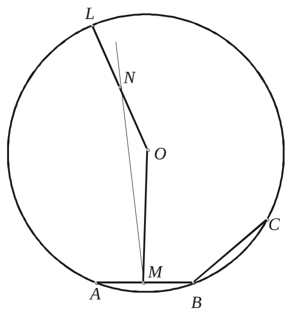
914. Transformacijom dobijamo da je $(mn-6)^2+(m-2)^2+(n-3)^2=5$. Odavde slijedi da su brojevi $(mn-6))^2, (m-2)^2, (n-3)^2$ jednaki brojevima 0, 1 i 4 u nekom redoslijedu. Provjerom dobijamo da je: m=2, n=4 i m=2, n=2.

915. Sl. 324. Kako je $\sphericalangle EPC = \sphericalangle PEB + \sphericalangle PBE = 1/2\sphericalangle A + 1/2\sphericalangle B = 90° - 1/2\sphericalangle C = 90° - \sphericalangle ICP$, slijedi CI⊥DE. Kako je CI visina i simetrala u △MCP, imamo da je $CM=CP$ (1). (Sa druge strane, $\sphericalangle CID = \sphericalangle IAC + \sphericalangle ACI = 1/2\sphericalangle A + 1/2\sphericalangle C = \sphericalangle ICD$, pa je $DC=DI$, tj. $\triangle IDC$ je jednakokraki, sa vrhom u tački D. Iz podudarnosti trouglova IDP i CDP i trouglova MID i MCD, slijedi $PC=PI$ i $MI=MC$ (2). Iz (1) i (2) slijedi $CM=MI=IP=PC$, pa je $IPCM$ romb.

916. Kako je $\sphericalangle AOB$=40°, $\sphericalangle AOL = 60°$, slijedi da je $\triangle ALO$ jednakostraničan, sl. 325. Kako je tačka N središte duži OL, to je $\sphericalangle ANO$=90° i $\sphericalangle OAN$= 30°. Kako je $\sphericalangle AMO$=90° i $\sphericalangle ANO$=90°, slijedi da je četverougao $AMNO$ tetivni, pa je $\sphericalangle OMN$= $\sphericalangle OAN$=30°.



Sl. 324



Sl. 325

917. Na osnovu nejednakosti između geometrijske i aritmetičke sredine važi :

$$\sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{ab}{(a+c)(b+c)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right) \quad (1)$$

$$\sqrt{\frac{bc}{bc+a(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{bc}{(b+a)(c+a)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}\right) \quad 2)$$

$$\sqrt{\frac{ca}{ca+b(a+b+c)}} = \sqrt{\frac{ca}{(c+b)(a+b)}} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+b}+\frac{a}{a+b}\right) \quad (3)$$

Sabirajući (1), (2) i (3) dobijamo: $\sqrt{\frac{ab}{ab+c(a+b+c)}} + \sqrt{\frac{bc}{bc+a(a+b+c)}} + \sqrt{\frac{ca}{ca+b(a+b+c)}}$

$\leq \frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{b}{b+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+a}+\frac{c}{c+a}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{c}{c+b}+\frac{a}{a+b}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{a+c}+\frac{c}{a+c}\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{b+c}+\frac{c}{b+c}\right)$
$+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{a+b}+\frac{a}{a+b}\right)=\frac{1}{2}(1+1+1)=\frac{3}{2}.$

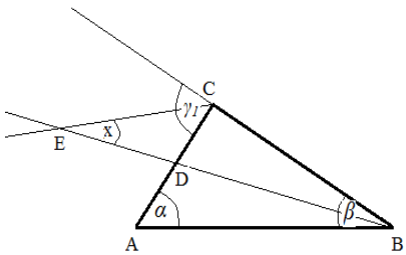
918. Kako je105=3·5·7=1·3·5·7 to su cifre koje učestvuju u formiranju traženih brojeva 1, 3, 5, i 7. Brojevi manji od 3000 počinju cifrom 1 pa su traženi brojevi: 1257; 1375; 153; 1735; i 1753.

919. Izuzimajući Petra u razredu ostaje 31 učenik. Ove učenike podijelimo u grupe po broju grešaka koje su napravili. Takvih grupa ima 10. Kako je 31:10=3 i ostatak 1, to znači da u jednoj grupi ima moraju biti četiri učenika.

920. Za p=2 imamo da je $2^2+7=11$, a to je prost broj. Za $p>2$ svi prosti brojevi su neparni pa je p^2+7 paran broj koji ima vrijednost veću od 2, a to znači da je složen broj. Znači p=2 je jedini prost za koji je p^2+7 prost broj.

921. Broj je djeljiv sa 15 ako je djeljiv i sa 3 i sa 5. Da bi broj bio djeljiv sa 3 mora mu zbir cifara biti djeljiv sa 3. Od 4 cifre mogu se formirati 4 podskupa po 3 cifre pomoću kojih se pišu trocifreni brojevi, a to su {1,3,5}, {1,3,0}, {1,5,0} i {3,5,0}. Kako je zbir cifara u prvom i trećem podskupu djeljiv sa 3 to znači da za formiranje traženih trocifrenih brojeva u obzir dolaze cifre iz skupova {1,3,5} i {1,5,0}. Da bi broje bio djeljiv sa 5 mora se završavati cifrom 0 ili 5. Zbog toga se pomoću cifara skupa {1,3,5} mogu formirati brojevi 135 i 315 koji su djeljivi sa 15, a pomoću cifara skupa {1,5,0} brojevi 150, 105 i 510. Traženi brojevi su: 135, 315, 150, 105 i 510.

922. Posmatrajmo sl. 326. Označimo sa x ugao između simetrala unutrašnjeg ugla β i spoljašnjeg ugla γ_1 trougla ABC. Uočimo trouglove ABD i EDC. U $\triangle ABD$ je zbir unutrašnjih uglova $\alpha+\frac{\beta}{2}+\sphericalangle ADB=180^0$, a u $\triangle EDC$ je zbir uglova $x+\frac{\gamma_1}{2}++\sphericalangle EDC=180^0$. Iz ovih jednakosti dobijamo $\alpha+\frac{\beta}{2}+\sphericalangle ADB=x+\frac{\gamma_1}{2}+\sphericalangle EDC$. Uglovi $\sphericalangle ADB$ i $\sphericalangle EDC$ su unakrsni, tj. $\sphericalangle ADB=\sphericalangle EDC$. Dalje, kako je γ_1 spoljašnji ugao unutrašnjeg ugla $\gamma=\sphericalangle ACB$, to važi
$\gamma_1=\alpha+\beta$; $\frac{\gamma_1}{2}=\frac{\alpha+\beta}{2}$. Zamjenjujući gore navedeno u jednakost $\alpha+\frac{\beta}{2}+\sphericalangle ADB=x+\frac{\gamma_1}{2}+\sphericalangle EDC$ dobijamo da je $\alpha+\frac{\beta}{2}=x+\frac{\alpha}{2}+\frac{\beta}{2}$, pa je $x=\frac{\alpha}{2}$.



Sl. 326

923. Kako je $540=2^2 \cdot 3^3 \cdot 5$, to uslovima zadatka slijedi da je $n=2 \cdot 5^2=50$. Tada je $m^3=2^2 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 2 \cdot 5^2=2^3 \cdot 3^3 \cdot 5^3=(2 \cdot 35 \cdot)^3=30^3$, a odavde slijedi da je $m=30$. Traženi brojevi su $m=30$ i $n=50$.

924. Broj je djeljiv sa 12 ako je djeljiv sa 3 i sa 4. Da bi broj bio djeljiv sa 3 mora mu zbir cifara biti djeljiv sa 3. Od 5 cifara može se formirati 5 podskupova od po 4 cifre, a to su {1,2,3,5}, {1,2,3,8}, {1,2,5,8}, {1,3,5,8} i {2,3,5,8}. Zbir cifara je djeljiv sa 3 samo kod podskupa {2,3,5,8} Da bi traženi četverocifreni brojevi bili djeljivi sa 4 moraju im dvocifreni završeci biti djeljivi sa 4. Dakle, traženi četverocifreni brojevi se moraju završavati sa 28, 32 i 52. Ako se završavaju sa 28 onda su to brojevi 3528 i 5328, ako završavaju sa 32, onda su to brojevi 5832 i 8532 i ako završavaju sa 52, onda su to brojevi 3852 i 8352. Traženi brojevi su: 3528, 5328, 5832, 8532, 3852 i 8352.

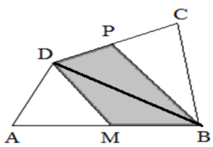
925. Svaki od ovih 100 sabiraka je manji od $\frac{1}{50}$ i važi $\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\cdots+\frac{1}{150}<\frac{100}{50}=2$. Takođe, svaki od ovih 100 sabiraka je veći od $\frac{1}{150}$ pa važi $\frac{1}{51}+\frac{1}{52}+\frac{1}{53}+\cdots+\frac{1}{150}>\frac{100}{150}=\frac{2}{3}$, što je i trebalo dokazati.

926. Konstruišimo dijagonalu *BD* četverougla *ABCD* i uočimo trouglove *ABD* i *MBD*, sl. 327. Oni imaju jednake visine koje odgovaraju stranicama *AB* i *MB*. Kako je AB=2AM to je površina $\triangle ABD$ dva puta veća od površine $\triangle MBD$. Slično dokazujemo da je površina $\triangle BCD$ dva puta veća od površine $\triangle BPD$. Dalje slijedi $P_{ABCD} : P_{MPBD} = 2 : 1$.

927. Neka su x i y traženi brojevi i neka je $x<y$. Tada je, prema uslovima zadatka, $x+y=2016$ i $x : y = 3{,}5 : 17{,}5$, odnosno $x : y = 5 : 1$. Rješavanjem sistema jednačina $x+y=2016$ i $x : y = 5 : 1$ dobijamo $x = 336$ i $y = 1680$.

928. Neka je $A=303^{404}$ i $B=404^{303}$ tada važi

$$\frac{A}{B}=\frac{303^{404}}{404^{303}}=\frac{\left(303^4\right)^{101}}{\left(404^3\right)^{101}}=\frac{\left(101^4 \cdot 3^4\right)^{101}}{\left(101^3 \cdot 4^3\right)^{101}}=\frac{\left(101^4 \cdot 81\right)^{101}}{\left(101^3 \cdot 64\right)^{101}}=\frac{(101 \cdot 81)^{101}}{64^{101}}>1.$$ Dakle, $A>B$.



Sl. 327

929. Učenik je osvojio 38 bodova. Da je riješio 2 zadatka više onda bi mu se broj bodova povećao za 16; 8 za dva tačno riješena zadatak i 6 bodova za ta dva zadatka koji su mu oduzeti, jer ih nije riješio. Neka je x broj zadataka na pismenom. Tada je, prema uslovima zadatka, $4 \cdot 80\% \cdot x - 3 \cdot 20\% \cdot x = 52$, tj. $4 \cdot 0{,}8 \cdot x - 3 \cdot 0{,}2 \cdot x = 52$. Rješenje ove jednačine je $x=20$. Neka je y broj tačno riješenih zadataka. Tada je, prema uslovima zadatka, $4\cdot y-3\cdot(20-y)=38$. Odavde slijedi $y=14$. Dakle učenik je, od 20 zadataka, tačno riješio 14 zadataka, što iznosi 70%.

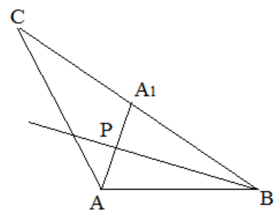
930. Za $p=2$ izraz $2^{2016}+2015\cdot 2$ je paran broj veći od 2, pa je prema tome i složen broj. Za sve ostale proste brojeve sabirci izraza $p^{2016}+2015\cdot p$ su neparni brojevi pa im je zbir paran broj veći od 2. Dakle, ako je p prost broj, onda je $p^{2016}+2015\cdot p$ složen broj.

931. Kako je $\sqrt{x^2-12x+9}<x \Leftrightarrow \sqrt{(2x-3)^2}<x \Leftrightarrow |2x-3|<x$, to je $2x-3<x$ za $x\geq\frac{3}{2}$ i $-(2x-3)<3$ za $x<\frac{3}{2}$. a) Za $x\geq\frac{3}{2}$ dobijamo $x<3$, pa $x\epsilon[\frac{3}{2},3)$
b) Za $x<\frac{3}{2}$ iz nejednačine $-(2x-3)<3$ dobijamo $x>1$, pa je rješenje $x\epsilon(1,\frac{3}{2}]$.
Dakle, rješenje nejednačine $\sqrt{x^2-12x+9}<x$ je $x\epsilon(1,\frac{3}{2}]\cup[\frac{3}{2},3)$, tj. $x\epsilon(1,3)$

932. Neka su a, b i c stranice kvadra i neka je, prema uslovima zadatka, $a\cdot b=15$ cm^2 i $a\cdot c=24$ cm^2. Kako je površina kvadra $P=2\cdot(a\cdot b+a\cdot c+b\cdot c)$, $P=98$ cm^2, $a\cdot b=15$ cm^2 i $a\cdot c=24$ cm^2 dobijamo da je $b\cdot c=10$ cm^2. Zapremina kvadra je $V=a\cdot b\cdot c$ pa množeći jednakosti $a\cdot b=15$, $a\cdot c=24$ i $b\cdot c=10$ dobijamo $V^2=(a\cdot b\cdot c)^2=3600$; $V=a\cdot b\cdot c=60$ cm^3.

933. Iz uslova zadatka je: $a\cdot 10^3+b\cdot 10^2+c\cdot 10+1=3\cdot(2\cdot 10^3+a\cdot 10^2+b\cdot 10+c)$. Kako se broj $3c$ završava jedinicom, to je $c=7$. Dalje je, $1000a+100b+71=6000+300a+(3b+2)\cdot 10+1$. Kako je b cifra ($0\leq b\leq 9$), biće $2\leq 3b+2\leq 29$. Broj $3b+2$ se završava cifrom 7, pa je $3b+2\in\{7, 17, 27\}$. Moguće je samo za $b=5$. Sada je $1000a+571=6000+(3a+1)\cdot 100+71$. Kako je i a cifra, biće $1\leq 3a+1\leq 28$ i $3a+1$ se završava cifrom 5, te je $3a+1=25$, тj. $a=8$. Traženi broj je 857.

934. Poredajmo članove skupa A u rastućem nizu A={1, 4, 5, 6, 7, 9 ,10}. Broj 1 se ne može nalaziti na tabli, 4 će se nalaziti na tabli samo ako se nađe u podskupu sa brojem 1, broj 5 će se nalaziti napisan na tabli samo ako je član podskupa sa 1 ili 4, itd. Znači da će se svaki broj nalaziti na tabli onoliko puta koliko od njega ima manjih brojeva u skupu A. To znači da će traženi zbir biti:
$S=0\cdot 1+1\cdot 4+2\cdot 5+3\cdot 6+4\cdot 7+5\cdot 9+6\cdot 10=4+10+18+28+45+60=165$.



Sl. 328

935. Posmatrajmo trouglove ABP i PBA_1, sl. 328: $\sphericalangle ABP=\sphericalangle PBA_1$, $\sphericalangle APB=\sphericalangle BPA_1=90^0$. Na osnovu stava USU važi $\triangle ABP\cong\triangle PBA_1$, pa je $AB=A_1B$, tj. $2AB=BC$.

Sada zaključujemo da su mjerni brojevi stranica $\triangle ABC$: 1, 2 i 3 ili 2, 3 i 4. Kako je 1+2=3 ovi brojevi ne mogu biti mjerni brojevi stranica trougla tako da je AB=2, BC=4 i AC=3.

936. Napišimo A u obliku $A=\frac{2p-24}{13-p}=\frac{-2(13-p)+2}{13-p}=-2+\frac{2}{13-p}$. Kako $\frac{2}{13-p}$ mora biti cio broj, dobijamo da $13-p\in\{-2,-1,1,2\}$, pa $p\in\{11,12,14,15\}$, a jedino rješenje je $p=11$. Tražena cjelobrojna vrijednost, za $p=11$, iznosi A=−1.

937. Zbir $1+2+3+\ldots+2016=1008\cdot 2017$ je paran broj, a zbir $3+\ldots+2016=1008\cdot 2017-3$ je neparan broj. Uvećanjem bilo koja dva broja za po jedan početni zbir brojeva $3+4+\ldots+2016=1008\cdot 2017-3$ ostaje neparan broj. Ako bi u jednom trenutku svi brojevi bili jednaki njihov zbir bi bio paran broj, jer u zbiru $3+\ldots+2016$ ima 2014 brojeva pa bi zbir jedankih brojeva bio $2014\cdot$A, gdje su sa A označeni ti isti brojevi. Međutim, ako dva broja u zbiru promijene par-nost, zbir ne mijenja parnost, što znači da zbir polaznih brojeva uvijek mora biti neparan, a to znači da zbir ovih polaznih brojeva uvijek mora biti neparan, a to značiu da je odgovor negativan.

938. Označimo $\frac{\sqrt{2}+\sqrt{a}}{\sqrt{3}+\sqrt{b}}=\alpha,\ \alpha\in Q$, Odavde je $\sqrt{a}-\alpha\sqrt{b}=\alpha\sqrt{3}-\sqrt{2}$, pa se kvadriranjem dobija $a+\alpha^2 b-2\alpha\sqrt{ab}=3\alpha^2-2-2\alpha\sqrt{6}$, tj. $\sqrt{ab}=\beta+\sqrt{6}$, gdje $\beta\in Q$. Nakon još jednog kvadriranja dobijamo $ab=\beta^2+6+2\beta\sqrt{6}$, pa je $\beta=0$ i $ab=6$. Uslov $ab=6$ daje ove mogućnosti:

1) Za a=1 i b=6 je $\alpha=\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{3}+\sqrt{6}}\notin Q$;

2) Za a=2 i b=3 je $\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}+\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}\notin Q$;

3) Za a=3 i b=2 je $\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}=1\in Q$

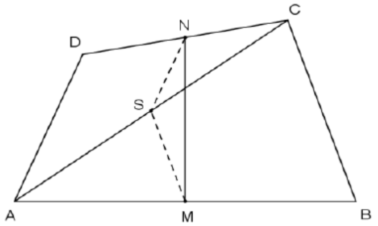
4) Za a=6 i b=6 je $\alpha=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{\sqrt{3}+1}=\sqrt{2}\notin Q$. Dakle, traženi brojevi su $a=3$, $b=2$.

939. Iz jednakosti $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2zx=8+2\cdot 4=16$, dobijamo da je $|x+y+z|=4$. Dokažimo da su brojevi x, y i z istog znaka, odakle slijedi da je $|x|+|y|+|z|=4$. Kako je $0=8-2\cdot 4=x^2+y^2+z^2-2(xy+yz+zx)=(x+y-z)^2-4xy$, то je $xy\geq 0$. Slično dobijamo $yz\geq 0$ i $zx\geq 0$. Kako je $xy\geq 0$, $yz\geq 0$ i $zx\geq 0$ zaključujemo da su brojevi x, y i z istog znaka (nulu možemo smatrati brojem sa proizvoljnim znakom), pa je $|x|+|y|+|z|=4$.

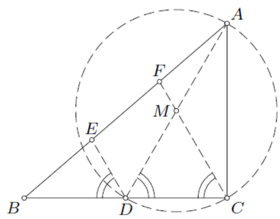
940. Kako je $n^5-5n^3+4n=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$. Od pet uzastopnih prirodnih brojeva bar je jedan djeljiv sa 5, bar jedan sa 4, bar jedan sa 3 i bar jedan sa 2 što znači da je njihov proizvod djeljiv sa proizvodom $5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=120$.

941. Ako Aleksa počinje igru onda Boris ima pobjedničku startegiju koja se sastoji u tome da ako je Aleksa izbrojao tri broja, onda Boris broji dva broja. Ako je Aleksa izbrojao četiri broja, onda Boris broji jedan broj, tj. poslije Borisovog brojanja broj do kojeg se stiglo mora biti djeljiv sa 5. U jednom trenutku broj poslije Borisovog brojanja će biti 2015 (djeljiv sa 5) Aleksa će morati reći broj 2016 i izgubiti igru.

942. Neka je S sredina dijagonale AC, sl. 329. Tada je MS srednja linija $\triangle ABC$, a SN je srednja linija $\triangle ACD$. Tada je $BC = 2 \cdot MS$ i $AD = 2 \cdot SN$. Sabiranjem ovih jednakosti dobijamo $BC + AD = 2 \cdot MS + 2SN = 2\,(MS + SN)$. Kako je $MS + SN \geq MN$ dobija se $AD + BC \geq 2 \cdot MN$. Ako je $AD + BC = 2 \cdot MN$, onda su tačke M, S, N kolinearne. To znači da je $AD||MN||BC$, a onda je MN srednja linija trapeza.



Sl. 329



Sl. 330

943. Neka je F središte duži AE, sl. 330. Tada je $BE = EF = FA$. Kako je i $BD = DC$, prave ED i FC su paralelne, pa na osnovu Talesove teoreme CF polovi AD. Označimo sa M središte AD. Iz uslova zadatka je $\sphericalangle BCF = \sphericalangle BDE = \sphericalangle ADC$, pa dobijamo da je $\triangle MCD$ jednakokraki, tj. MC=MD=MA. Dakle C je na polukrugu nad prečnikom AD, tj. $\sphericalangle ACB$=$\sphericalangle ACD$=90°.

944. Ostaci pri dijeljenju sa 7 brojeva 2^n su 1, 2 ili 4. Ostaci pri dijeljenju sa 7 brojeva n^2 su 0, 1, 2 ili 4. Dakle, broj 2^n+n^2 ne može biti djeljiv sa 7.

945. Na osnovu nejednakosti između aritmetičke i geometrijske sredine važi: $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b-1} \cdot \frac{b^2}{a-1}} = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{b-1}} \cdot \frac{b}{\sqrt{a-1}}$. Kako za a>1 odnosno b>1 važi: $(a-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 \geq 4(a-1) \Leftrightarrow \sqrt{a^2} \geq \sqrt{4(a-1)} \Leftrightarrow a \geq 2\sqrt{a-1} \Leftrightarrow \frac{a}{\sqrt{a-1}} \geq 2$;
$(b-2)^2 \geq 0 \Leftrightarrow b^2 \geq 4(b-1) \Leftrightarrow \sqrt{b^2} \geq \sqrt{4(b-1)} \Leftrightarrow b \geq 2\sqrt{b-1} \Leftrightarrow \frac{b}{\sqrt{b-1}} \geq 2$;
to slijedi $\frac{a^2}{b-1} + \frac{b^2}{a-1} \geq 2 \cdot \sqrt{\frac{a^2}{b-1} \cdot \frac{b^2}{a-1}} = 2 \cdot \frac{a}{\sqrt{a-1}} \cdot \frac{b}{\sqrt{b-1}} = 2 \cdot 2 \cdot 2 = 8$, što je i trebalo dokazati.

946. U dati krug nacrtajmo kvadrat stranice 1 cm (to je moguće, jer dužina stranice kvadrata upisanog u krug je $\sqrt{2}$ cm, pa sigurno postoji kvadrat stranice 1 cm koji je sadržan u njemu). Podijelimo dati kvadrat, kao šahovsku ploču, na n^2 manjih kvadratića stranice $\frac{1}{n}$ cm i u svaki taj kvadratić upišimo krug. Svi poluprečnici tih upisanih krugova su $\frac{1}{2n}$ cm, a kako ih ukupno ima n^2, zbir njihovih poluprečnika je $n^2 \cdot \frac{1}{2n}$ cm $=\frac{n}{2}$ cm. Za n=2·2016=4032 potreban zbir dužina.

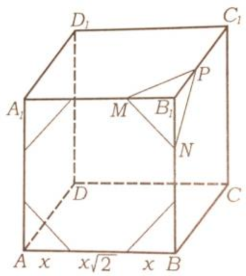
947. Izrazimo $x^2+1=y^2+2016$ kao $(x-y)(x+y)=2015$. Kako su x i y prirodni brojevi za koje važi $x^2+1=y^2+2016$ to zaključujemo da je $x>y$, pa je $x-y<x+y$. Kako je 2015=5·13·31, to ga možemo napisati u obliku sljedećih proizvoda dva broja:

1) $2015=1\cdot2015$; 2) $2015=5\cdot403$; 3) $2015=13\cdot155$; 4) $2015=31\cdot65$, pa važi:

1) $(x-y)(x+y)=1\cdot2015$, tj. $x=1008$ i $y=1007$;
2) $(x-y)\cdot(x+y)=5\cdot403$ tj. $x=204$ i $y=199$;
3) $(x-y)(x+y)=13\cdot155$, tj. $x=84$ i $y=71$;
4) $(x-y)(x+y)=31\cdot65$, tj. $x=48$ i $y=17$.

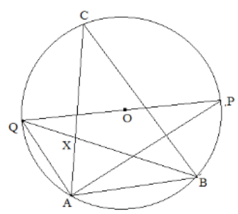
948. Iz uslova zadatka je $a^2=(a+b-c)^2=(a-c)(a+2b-c)$, $b^2=(a+b-c)^2-a^2=(b-c)(2a+b-c)$. Uvrštavajući ove jednakosti u jednakost koju treba dokazati dobijamo $\frac{a^2+(a-c)^2}{b^2+(b-c)^2}=\frac{(a-c)(a+2b-c)+(a-c)^2}{(b-c)(2a+b-c)+(b-c)^2}=\frac{2(a-c)(a+b-c)}{2(b-c)(a+b-c)}=\frac{a-c}{b-c}$.

949. Neka je x dužina odsječenog dijela stranice kvadrata, sl. 331. Tada je stranica pravilnog osmougla $x\sqrt{2}$, pa iz jednakosti $x+x\sqrt{2}+x=a$ je $x=\frac{a(2-\sqrt{2})}{2}$. Posmatrajmo odsječenu piramidu kod tjemena B_1. Ako za osnovu uzmemo pravougli $\triangle MNB_1$ čije su katete $B_1M=B_1N=x$, onda je visina te piramide $B_1P=x$. Zapremina piramide MNB_1P je $V_1=\frac{1}{3}\cdot\frac{x\cdot x}{2}\cdot x=\frac{1}{6}\cdot x^3=\frac{1}{6}\cdot\frac{a^3}{8}\cdot\left(2-\sqrt{2}\right)^3=\frac{a^3}{24}(10-7\sqrt{2})$. Tražena zapremina nastalog poliedra je $V=a^3-8V_1=a^3-\frac{a^3}{3}\cdot\left(10-7\sqrt{2}\right)=\frac{7a^3}{3}\cdot(\sqrt{2}-1)$.



Sl. 331

950. Iz $BX=CX$ slijedi $\sphericalangle XCB=\sphericalangle XBC$, tj. $\sphericalangle ACB=\sphericalangle QBC$, sl. 332. Kako je $\sphericalangle AQB=\sphericalangle ACB$ (periferijski ugao nad lukom AB) to važi $\sphericalangle AQB=\sphericalangle QBC$ pa je QA∥CB. Kako je $AP\perp BC$ onda je i $AP\perp AQ$, tj. $\sphericalangle PAQ=90^0$, te je PQ prečnik kruga K.



Sl. 332

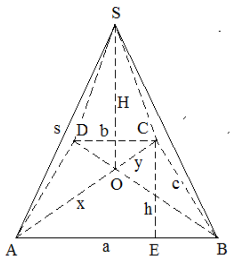
951. Važi $a^4+41-7a^2-10a>0\Leftrightarrow a^4-8a^2+16+a^2-10a+25>0\Leftrightarrow(a^2-4)^2+(a-5)^2>0$, te je $(a^2-4)^2\geq0$ i $(a-5)^2\geq0$ dokazaćemo da zbir ovih izraza ne može biti jednak nuli. Ako je $(a^2-4)^2=0$ i $(a-5)^2=0$, onda je $a=\pm2$ i $a=5$, pa je $a^4+41>7a^2+10a$ tačna nejednakost.

952. Pobjednička strategiju ima Bojan tako što u jednom krugu oba takmičara zajedno uzmu 4 žetona, tj. ako Aleksandar uzme 1 žeton, Bojan uzima 3, ako Aleksandar uzme 2 žetonai Bojan uzima 2 žetona, i ako Aleksandar uzme 3 žetona

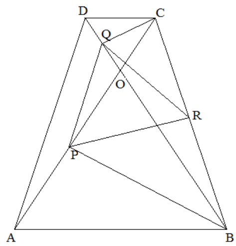
Bojan uzima 1 žeton. Kako je broj 2016= 4·504, tj. 2016 je djeljiv sa 4, i u jednom trenutku će na gomili ostati 4 žetona pri čemu će na potezu biti Aleksandar, a kako on mora uzeti bar jedan žeton i ne može uzeti sve to će posljednji žeton uzeti Bojan i tako pobijediti.

953. Iz pravouglog $\triangle BCE$ (sl. 333) nalazimo da je $h = 4\sqrt{3}\ cm$. Iz pravouglog $\triangle AEC$ nalazimo da je $AC = 8\ cm$. Trouglovi ABO i CDO su slični, pa je $x:y = 5:3$. Kako je $x + y = 8$ nalazimo da je $x = 5$ cm i $y = 3$ cm. Visinu piramide određujemo iz pravouglog $\triangle AOS$ i dobijamo da je $H = 5\sqrt{3}\ cm$. Zapremina piramide:
$V = \frac{1}{3} \cdot B \cdot H = \frac{1}{3} \cdot \frac{a+b}{2} \cdot h \cdot H$; $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{5+3}{2} \cdot 4\sqrt{3} \cdot 5\sqrt{3} = 80\ cm^2$.

954. Neka je $a = \overline{xy}$, tada, prema uslovima zadatka važi: $10x+y=x^3+y^3$, odnosno $x\cdot(10-x^2)=y\cdot(y-1)$. Vrijednost izraza $y\cdot(y-1)$ je paran broj, pa to mora biti i broj x. Broj x mora biti manji od 4 da bi $(10-x^2)$ bio pozitivan, tj. $x=2$. Uvrštavanjem u gornju jednačinu dobijamo $y\cdot(y-1)=12$, odnosno $y=4$, pa je 24 traženi broj.



Sl. 333



Sl. 334

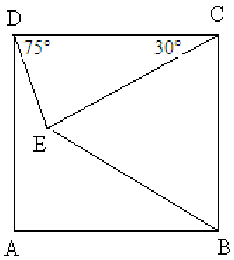
955. Označimo $AD = BC = c$, sl. 334. Kako je P središte duži AO i Q središte duži OD, to je PQ srednja linija, tj. $PD = \frac{AD}{2} = \frac{c}{2}$ (1). Kako su trouglovi ABC i ACD podudarni onda je $\sphericalangle CAB = \sphericalangle ABD$ što znači da je $\triangle ABO$ jednakokraki. Kako je $\sphericalangle CAB = 60O$ to je $\triangle ABO$ jednakostraničan. Slično je i $\triangle COD$ jednakostraničan. Kako je tačka P središte duži AO, a $\triangle$ ABO je jednakostraničan onda je $BP \perp AO$, što znači da je $\triangle CPB$ pravougli sa hipotenuzom BC, a kako je R središte hipotenuze to je $CR=RB=RP=\frac{c}{2}$ (2). Kako je tačka Q središte duži DO, a $\triangle CDO$ je jednakostraničan to je $CQ \perp DO$, što znači da je $\triangle CQB$ pravougli sa hipotenuzom BC, a kako je R središte hipotenuze to je $CR=RB=RQ=\frac{c}{2}$ (3) Iz (1), (2) i (3) slijedi da je $\triangle PQR$ jednakostraničan.

956. Koristimo odnos između aritmetičke i geometrijske sredine:
$\sqrt{(4a+1)\cdot 1} < \frac{(4a+1)+1}{2}$; $\sqrt{(4b+1)\cdot 1} < \frac{(4b+1)+1}{2}$; $\sqrt{(4c+1)\cdot 1} < \frac{(4c+1)+1}{2}$. Dakle, važi $\sqrt{(4a+1)} < 2a+1$; $\sqrt{(4b+1)} < 2b+1$; $\sqrt{(4c+1)} < 2c+1$. Sabiranjem ovih nejednakosti slijedi $\sqrt{4a+1} + \sqrt{4b+1} + \sqrt{4c+1} < 2(a+b+c) + 3 = 5$.

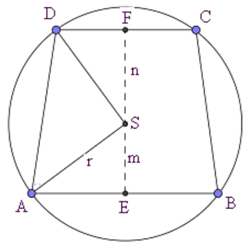
957. a) Moguće je. Ako goste rasporedimo tako da sjede dva muškarca pa dvije žene i tako redom do kraja, a to je moguće jer imamo 2016 muškaraca i isto toliko žena. I ovi brojevi su djeljivi sa 2. Ovakim rasporedom uvijek je muškarac „okružen“ jednom ženom i jednim muškarcem, a isto tako je i svaka žena „okružena“ jednom ženom i jednim muškarcem.
b) Nije moguće. Ako goste rasporedimo kao u slučaju pod a) onda uvijek moraju biti 2 muškarca, jedan do drugog, „okruženi“ sa dvije žene. Za ovakav raspored potrebno je paran broj muškaraca, a kako je njih 2017, znači da će na „kraju“ raspoređivanja 1 muškarac biti „okružen“ sa dvije žene.

958. Broj $9 \cdot 9 = 81$ završava se cifrom 1, a broj $9 \cdot 9 \cdot 9 \cdot 9$ cifrom 1, itd. Dakle, svi proizvodi sa neparnim brojem devetki završavaju se cifrom 9, a sa parnim brojem devetki cifrom 1. To znači da se traženi broj završava cifrom 9.

959. Kako je $2b + 2$ paran broj, to slijedi da su a i c neparni. To znači da je b paran broj. Kako je $a + 1 = 2b + 2 = 3c + 3$, to je $a > b > c$. Za najmanju vrijednost proizvoda treba izabrati da su $a, b\ i\ c$ što manji prirodni brojevi. Za $c = 3$ je $b = 5$ i $a = 11$. Kako je b paran broj, to ne zadovoljava postavljene uslove. Za $c = 5$, je $b = 8$ i $a = 17$, pa je najmanji proizvod $a \cdot b \cdot c = 17 \cdot 8 \cdot 5 = 680$.
960. Posmatrajmo trougao CDE, sl. 335. Kako znamo da je $\sphericalangle EDC$=75° i $\sphericalangle DCE$=30°, to je i $\sphericalangle DEC$=75°, pa je trougao CDE jednakokraki, tj. važi CE=CD. Kako je $\sphericalangle DCE$=30°, to je $\sphericalangle BCE$=60° i pošto važi CE=CD=BC, to je trougao BCE jednakostraničan, pa odatle slijedi da je BE=BC=AB.



Sl. 335



Sl. 336

961. Sve stanovnike podijelimo u 33 klase (sa 32, 31,..., 2, 1, 0 zuba). Kako je 70 000 : 33 = 2121, a ostatak dijeljenja je 7 , to, na osnovu Dirihleovog principa, postoji bar 2100 stanovnika koji imaju isti broj zuba.
962. Neka trećem radniku treba x dana da sam uradi posao. Tada, radeći zajedno, sva tri radnika urade za jedan dan $\frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{x}$ posla, a za 7,5 dana cijeli posao, pa je $7{,}5 \cdot \left(\frac{1}{15} + \frac{1}{18} + \frac{1}{x}\right) = 1$. Odatle slijedi da je $x = 90$ dana.

963. Iz $\sqrt{2} \cdot x - \sqrt{2} \cdot y = \sqrt{18}$ slijedi da je $x - x = 3$. Sada je
$$\frac{\sqrt{3} \cdot x}{3} - \frac{y}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot x}{3} - \frac{\sqrt{3} \cdot y}{3} = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot (x - y) = \sqrt{3}.$$

964. Iz $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ slijedi $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab = 9 - 4 = 5$. Dalje je, $(a^2 + b^2)^2 = a^4 + 2a^2b^2 + b^4 = 25$, pa odatle slijedi $a^4 + b^4 = 25 - 2a^2b^2 = 25 - 8 = 17$ pa je $a^4 + b^4 + 2000 = 2017$.

965. Visina trapeza je $14\ cm$. Tačka S je centar kruga opisanog oko trapeza, sl. 336. Ako je $SE = m$ i $SF = n$, onda je $SF = n = 14 - m$, pa je $r^2 = (14-m)^2 + 6^2 = m^2 + 8^2$. Odavde dobijamo da je $m = 6\ cm$, pa je $r = 10\ cm$. Površina kruga je $100\pi cm^2 \approx 314\ cm^2$, a površina trapeza je $196\ cm^2$, pa krug ima približno 118 cm² veću povšinu od trapeza.

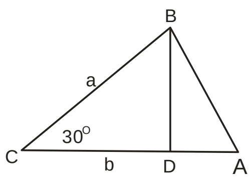
966. Kako je $ch = ab$, tj. $c^2h^2 = a^2b^2$, to je $h^2(a^2+b^2) = a^2b^2$. Odavde je $\frac{1}{h^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2b^2}$ ili $\frac{1}{h^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

967. Kako je $252=2\cdot2\cdot3\cdot3\cdot7$, vidimo da cifre tog trocifrenog broja mogu biti 4, 9 i 7 ili 6, 6 i 7 . Kako su svi trocifreni prosti brojevi neparni, to su rješenja neki od brojeva 479, 497, 749, 947 ili 667. Kako 7|497, 7|749 i 23|667 to su traženi prosti brojevi 479 i 947.

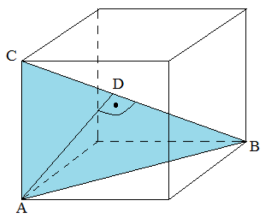
968. Neka je Laza ponio x maraka. Tada, prema uslovima zadatka, formiramo jednačinu $\frac{5}{6} \cdot x \cdot 0{,}6 + 1 + 14 = x$. Rješavanjem jadnačine dobijamo $x = 30\ KM$.

969. Neka je $x + \frac{1}{x} = t$, onda je $\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$, tj. $x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = t^2$. Tada je $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 + 2015$, pa je $f(t) = \left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 2015 = t^2 + 2015$. Dakle, $f(1) = 2016$, $f(2) = 2019$ i $f(x) = x^2 + 2015$.

970. Konstruišemo visinu BD trougla ABC, sl. 337. Kako je $\sphericalangle DCB = 30^0$ to je visina $BD = \frac{a}{2} = 2\ cm$, , a duž $CD = 2\sqrt{3}\ cm$. Tada je $AD = \left(5 - 2\sqrt{3}\right)cm$, a iz Pitagorine teoreme dobijamo da je $AD = \sqrt{41 - 20\sqrt{3}}\ cm$. Kako je $r = \frac{P}{s}$, to je $r = \frac{10}{9+\sqrt{41-20\sqrt{3}}}\ cm$



Sl. 337



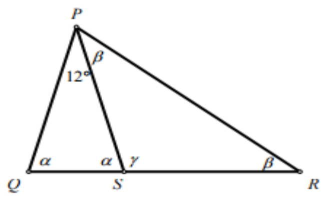
Sl. 338

971. Trougao ABC, sl. 338 na slici je pravougli, sa hipotenuzom $BC = a\sqrt{3}\ cm$ i katetama $AC = a\ cm$, $AC = a\sqrt{2}\ cm$. Traži se hipotenuzina visina AD, trougla ABC. Dobijamo je iz jednakosti $AC \cdot AB = AD \cdot BC$, odnosno iz $a\sqrt{2} \cdot a = a\sqrt{3} \cdot AD$. Dakle, $AD = \sqrt{\frac{2}{3}}\ cm$.

972. Neka je traženi broj $\overline{abcd}$. . Kako je po uslovu zadatka $4 \cdot \overline{abcd} = \overline{dcba}$, tada slijedi da je $a \leq 2$ (ako bi bilo a>2, onda je 4·a>10, pa bi se dobio petocifrean broj). Ne može biti $a = 1$ jer bi se onda broj koji je djeljiv sa 4 završavao neparnom cifrom 1. Dakle a=2. Tada je d= 8 ili d=9 (zbog mogućeg prenošenja kod množenja). Ne može biti d=9 jer se proizvod 4·9=36 ne završava cifrom 2 (jer 2 je zadnja cifra broja $\overline{dcba}$). Dakle d=8. Kako cifra b ne može biti veća od 2 (zbog prenosa sa mjesta stotina na mjesto hiljada jer se tu već nalazi broj a=2) provjerom zaključujemo da ni b=0 ni b=2 ne daju rješenja. Za b=1 imamo jednačinu $4 \cdot \overline{21c8} = \overline{8c12}$, odakle dobijamo c=7. Kako je 4·2178=8712, to znači da traženi broj postoji i on je jednak 2178.

973. U mješovitim parovima sjedi $\frac{4}{5}$ razreda, pa u ženskim parovima sjedi $\frac{1}{5}$ razreda. Tu $\frac{1}{5}$ razreda čini 6 djevojčica koje sjede zajedno, tj. u razredu ima 5·6 = 30 učenika. Od tih 30 učenika u mješovitim parovima su 24 učenika, pa dječaka ima 12, a djevojčica 18.

974. Trouglovi QPS i PSR su jednakokraki, sl. 339 pa je $\alpha = \sphericalangle PQS = \sphericalangle PSQ = (180^0 - 12^0\ ): 2 = 84^0$. Budući da je $\sphericalangle PQS$ vanjski ugao trougla PRS, zaključujemo da je: $\beta = \sphericalangle \mathrm{SPR} = \sphericalangle \mathrm{SRP} = \frac{1}{2} \cdot 84^0 = 42^0$. Konačno je: $\sphericalangle \mathrm{QPR} = \sphericalangle \mathrm{QPS} + \sphericalangle \mathrm{SPR} = 12^0 + 42^0 = 54^0$.



Sl. 339

975. Prva kosilica za 1 sat pokosi $2\frac{1}{2}: 2 = 1\frac{1}{4}\ ha$. Druga kosilica za 1 sat pokosi $1\frac{1}{4}: 1\frac{1}{2} = \frac{5}{6}\ ha$. Obe kosilice za 1 sat pokose $1\frac{1}{4} + \frac{5}{6} = 2\frac{1}{12}\ ha$. Za 3 sata i 36 minuta kosilice će pokositi $3\frac{3}{5} \cdot 2\frac{1}{12} = 7\frac{1}{2}\ ha$.

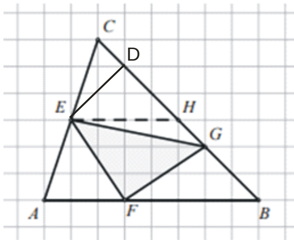
976. Imamo da je $a \cdot b \cdot b + 1 = 2017$, pa je $a \cdot b \cdot b = 2016$. Napišemo li broj 2016 kao proizvod prostih faktora dobićemo da je 2016=2·2·2·2·2·3·3·7 . Budući da jednakokraki trougao ima (najmanje) dvije stranice jednakih dužina, kombinovanjem dobijamo sljedeće mogućnosti:

b	1	2	3	4	6	12
b	1	2	3	4	6	12
a	2016	504	224	126	56	14

Kako u svakom trouglu zbir dužina svake dvije stranice mora biti veći od dužine treće stranice, taj uslov zadovoljava samo posljednja kombinacija. Dakle, dužina osnovice je 14 cm, a dužina krakova 12 cm. Obim tog trougla je 12 cm+12 cm+14 cm=38 cm.

977. Neka je bilo n članova matematičke sekcije. Svaki član poslao je $(n-1)$ razglednicu, a svi su poslali $n \cdot (n-1) = 342$.

978. Na osnovu podataka dobijamo da je stranica kvadratića $\sqrt{10}\ cm$, a dužina njegove dijagonale je $\sqrt{10} \cdot \sqrt{2}\ cm$, sl. 340, Prema podacim sa slike računamo površine trouglova: $P_{ABC} = \frac{8\cdot\sqrt{10}\cdot 6\sqrt{10}}{2} = 240\ cm^2$; $P_{AFE} = \frac{3\cdot\sqrt{10}\cdot 3\sqrt{10}}{2} = 45\ cm^2$; $P_{FBG} = \frac{5\cdot\sqrt{10}\cdot 2\sqrt{10}}{2} = 50\ cm^2$; kvadratića; $P_{CEG} = \frac{4\cdot\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}\cdot 2\sqrt{10}\cdot\sqrt{2}}{2} = 80\ cm^2$; Dakle, $P_{EFG} = P_{ABC} - (P_{AFE} + P_{FBG} + P_{CEG}) = 240 - (45 + 50 + 80) = 65\ cm^2$.



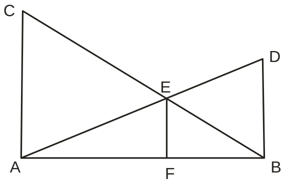
Sl. 340

979. Ako dvije jabuke teže kao tri kruške, onda 6 jabuka teži koliko i 9 krušaka. Slično, iz drugog uslova slijedi da 6 jabuka teži koliko i 8 pomorandži. Otuda zaključujemo da 9 krušaka teži koliko i 8 pomorandži, pa 18 krušaka teži koliko i 16 pomorandži. Međutim, iz trećeg uslova slijedi da 18 krušaka košta koliko i 15 pomorandži. Dakle, kilogram pomorandži je skuplji nego kilogram krušaka.

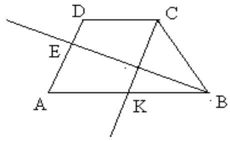
980. Takvi četvorocifreni brojevi mogu se zapisati sa dve cifre koje se pojavljuju po dva puta ili sa tri cifre od kojih se jedna pojavljuje dva puta, a ostale dve po jednom. U prvom slučaju, na tri načina biramo koje se dve cifre pojavljuju dva puta u zapisu broja. Neka su to na primer neke cifre a i b. Brojevi zapisani pomoću njih su: $aabb, abab, abba, baba, baab, bbaa$. Ovakvih brojeva ima 3·6=18.
U drugom slučaju, na tri načina biramo cifru koja se u zapisu broja pojavljuje dva puta, na četiri načina biramo mesto na kome je jedna od cifara koje se u tom zapisu pojavljuju jednom, a na tri načina biramo mjesto na kome je druga od cifara koje se u tom zapisu pojavljuju jednom. U tom slučaju ima 3·4·3=36 brojeva. Ukupno ima 54 broja sa datom osobinom.

981. Neka je tačka F podnožje normale iz tačke E na duž AB, sl. 341. Trouglovi AFE i ABD su pravougli i imaju zajednički ugao FAE, pa su slični. Slijedi da je $FE : BD = AF : AB$. Trouglovi FBE i ABC su pravougli i imaju zajednički ugao ABC, pa su i oni slični, te važi $FE : AC = FB : AB$. Iz ovih jednakosti dobijamo $\frac{FE}{BD} + \frac{FE}{AC} = \frac{AF+FB}{AB}$; $FE\left(\frac{1}{BD} + \frac{1}{AC}\right) = 1$. Prema tome, dužina duži FE, a samim tim i traženo rastojanje, je $2\ cm$.

982. Za prvih 9 stranica potrebno je 9 cifara. Za stranice od 10. do 99. potrebno je 2·90=180 cifara. Stranica s trocifrenim brojem ima najviše 900, a za njih je potrebno najviše 3·900=2700 cifara. Kako je 9+180+2700=2889, što premašuje zadani broj, trocifrenih stranica eventualno ima manje od 900. Za označavanje stranica jednocifrenim i dvocifrenim brojevima treba 180 + 9 = 189 cifara, a za označavanje stranica trocifrenim brojevima preostaje 2017– 89=1828 cifara. Kako broj 1828 nije djeljiv brojem 3 (jer je zbir njegovih cifara 19) to označavanje stranica knjige s tačno 2017 cifara nije moguće.



Sl. 341



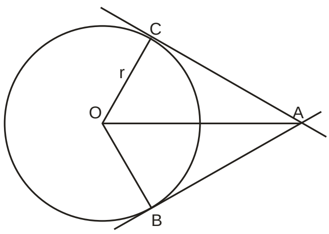
Sl. 342

983. Prava kroz tačku C paralelna sa AD siječe osnovicu AB u središtu K, tj. AK=KB, sl. 342 Na osnovu Talesove teoreme prava određena tačkama C i K polovi duž BE i normalna je na nju tj. ona je simetrala duži BE. Na osnovu osobine simetrale duži slijedi da je CE=CB.

984. Kako je $8x + 3y = 2013$, to je $8x = 3 \cdot (671 - y)$, pa je $x = 3k$. Sada je $24 \cdot k = 3 \cdot (671 - y)$, odakle slijedi $y = 671 - 8k$, $k \in N$. Kako je $x_n > 0$ i $y_n > 0$, $k \in N$, to je $671 - 8k > 0$, pa je $1 < k \leq 83$. Dakle, $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 3 \cdot 1 + 3 \cdot 2 + 3 \cdot 3 + \cdots + 3 \cdot 83 = 3 \cdot (1 + 2 + 3 + \cdots + 83) =$ 10 458.

985. Prema uslovima zadatka je $3 \cdot v_1 = 2{,}5 \cdot v_2$ i $1{,}5 \cdot v_2 - 1{,}5 \cdot v_1 = 24$. Rješenje ovog sistema je $v_1 = 80\ km/h$ i $v_2 = 96\ km/h$.

986. Kako je $OA = r$, $OB = r$ i $\sphericalangle ABO = 90^0$, to je $\sphericalangle OAB = 30^0$, sl. 343. Slično i $\sphericalangle OAC = 30^0$, pa je $\sphericalangle BAC$=60^O. Tada je $\sphericalangle BAC = 120^0$, pa je dužina luka koji se vidi iz tačke A jednaka trećini obima kruga i iznosi $\frac{2\pi r}{3}$.



Sl. 343

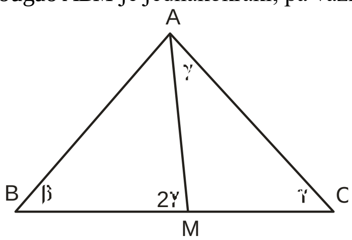
987. Zbog 10 ·100=1000 i 100 ·1000=100000 slijedi da proizvod dvocifrenog i trocifrenog broja može biti četvorocifren ili petocifren broj sa svim dvojkama tj. 2 222 ili 22 222. Neka su x i y traženi brojevi tada je $x \cdot y$ = 2 222 ili $x \cdot y$ = 22

222. Posmatrajmo slučaj $x \cdot y = 2\,222 = 2 \cdot 11 \cdot 101$ pa su traženi brojevi $x = 11$ i $y = 202$ ili $x = 22$ i $y = 101$. U slučaju $x \cdot y = 22\,222 = 2 \cdot 41 \cdot 271$ imamo sljedeće mogućnosti $x = 41$ i $y = 542$ ili $x = 82$ i $y = 271$.

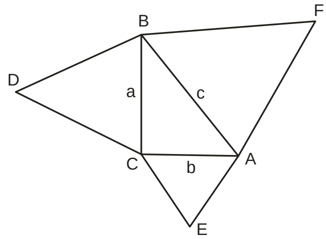
988. Kako je $a \neq 0$ i $12\% = \frac{12}{100} = \frac{3}{25}$, to zbog uslova zadatka važi jednakost $\overline{ac} = \frac{3}{25}\overline{abc}$, tj. $25(10a + c) = 3(100a + 10b + c)$, odnosno $50a + 30b = 22c$, $c \neq 0$. Iz zadnje jednakosti slijedi da je broj $22c$ djeljiv sa 10 jer su oba sabirka, lijeve strane, djeljiva sa 10, a to znači da je $c = 5$. Odatle slijedi da je $50a + 30b = 110$, odnosno $5a + 3b = 11$. Kako je $5a < 11$, slijedi da je $a = 1$ ili $a = 2$. Za $a = 1$ dobijamo da je $b = 2$, pa je $\overline{abc} = 125$. Za $a = 2$ nema rješenja.

989. Neka su crvene tačke C_1, C_2, C_3, C_4, C_5, a P_1, P_2, P, P_4. Plava tačka P_1 može sa crvenim tačkama obrazovati sljedeće trouglove: $P_1C_1C_2$, $P_1C_1C_3$, $P_1C_1C_4$, $P_1C_1C_5$, $P_1C_2C_3$, $P_1C_2C_4$, $P_1C_2C_5$, $P_1C_3C_4$, $P_1C_3C_5$, $P_1C_4C_5$. Dakle, ako je jedna plava tačka P_1 i dvije crvene ukupno je 10 trouglova. Plavih tačaka je 4, pa je ukupno 40 trouglova.
Analogno, ako je prva crvena tačka C_1, a iza nje dvije plave tačke, onda imamo 6 trouglova: $C_1P_1P_2$, $C_1P_1P_3$, $C_1P_1P_4$, $C_1P_2P_{32}$, $C_1P_2P_4$, $C_1P_3P_4$. Crvenih tačaka je 5, pa u ovom slučaju imamo 30 trouglova. Ukupno je 40+30=70 trouglova

990. Jedan od trouglova ABM i AMC je tupougli, sl. 344. Neka je to AMC sa tupim uglom $\sphericalangle AMC$, tada je $AM = MC$ ($\Delta\, AMC$ je jednakokraki). Prema uslovu zadatka i trougao *ABM* je jednakokraki, pa važi: $AB = AM$ ili $BA = BM$ ili $MA = MB$.



Sl. 344



Sl. 345

1) Neka je $AB = AM$ i $MA = MB$. Tada je $\sphericalangle MAC = \sphericalangle MCA = \gamma$ pa je $\sphericalangle BMA = 2\gamma$. Iz jednakokrakog trougla ABM slijedi $\beta = 2\gamma$ (spoljašnji ugao trougla AMC), pa iz trougla ABC imamo $\beta + \gamma + 75^0 = 180^0$; $3\gamma = 105^0$, odnosno $\gamma = 35^0$. Dakle, uglovi trougla su 75^0, 70^0 i 35^0.

2) $BA = BM$, $MA = MC$. Iz jednakokrakog trougla ABM slijedi $< BAM = 2\gamma$. Dalje je $\sphericalangle BAM + \sphericalangle MAC = 75^0$; $3\gamma = 75^0$, odnosno $\gamma = 25^0$. Из $\beta + \gamma + 75^0 = 180^0$ i nalazimo da je $\beta = 80^0$. Uglovi trougla su 75^0, 80^0 i 25^0.

3) $MB = MA$, $MA = MC$. Tada je $\gamma = 45^0$, tj. $\sphericalangle CAB = 90^0$, što je kontradikcija.

991. Neka je $n = 10k + x$, $k \in N \cup \{0\}$ i x cifra. Tada je. $m = 100k^2x + x^2$. Cifra desetica broja m jednaka je zbiru cifara desetica brojeva $20kx$ i x^2; ako je taj zbir jednocifren, ili zbiru umanjenom za 10 ako je dvocifren (što ne utiče na parnost cifre desetica). Kako je cifra desetica broja $20kx$ parna, to su cifre desetica brojeva m i x^2 iste parnosti. Broj x^2 je jednocifren ili dvocifren. Ako je jednocifren, cifra desetica mu je 0, pa je cifra desetica broja m paran broj, suprotno pretpostavci. Ako je x^2 dvocifren, onda su to samo brojevi 16 i 36. Dakle, poslednja cifra broja m je 6.

992. Posmatrajmo prvo koliko ima uređenih parova (m, n) gdje su m i n prirodni brojevi koji ispunjavaju uslove zadatka:
Ako je $m = 1$, onda n može imati vrijednosti $1, 2, 3, \cdots, 2015$; ako je $m = 2$ onda n može imati vrijednosti $1, 2, 3, \cdots, 2014$; i najzad, ako je $m = 2015$ onda n može imati vrijednost 1. Dakle, uređenih parova (m, n) gdje su m i n prirodni brojevi ima $1 + 2 + 3 + \cdots + 2015 = \frac{2015 \cdot 2016}{2} = 2\,031\,120$. Prebrojmo sada koliko ima uređenih parova (m, n) gdje su m i n cijeli brojevi različiti od nule koji ispunjavaju uslove zadatka: Iz uslova $|m| + |n| < 2017$ slijedi da svakom uređenom paru (m, n) prirodnih brojeva koji zadovoljavaju uslov možemo pridružiti uređene parove $(-m, n)$, $(m, -n)$, $(-m, -n)$ cijelih brojeva koji ispunjavaju uslove zadatka. Prema tome, broj uređenih parova (m, n) gdje su m i n cijeli brojevi različiti od nule ima ukupno $4 \cdot 2\,031\,120 = 8\,124\,480$.
Na kraju, ostaje prebrojati uređene parove kojima je bar jedna koordinata jednaka nuli. Ako je $m = 0$, onda iz uslova $|m| + |n| < 2017$ slijedi da je $|n| < 2017$, a cijelih brojeva n koji zadovoljavaju taj uslov ima $4 \cdot 2016 + 1 = 4033$. Dakle, ima 4033 uređenih parova kojima je prva koordinata nula, a ispunjavaju uslov zadatka. Analogno, ima 4033 uređenih parova kojima je druga koordinata nula, a ispunjavaju uslov zadatka. Ukupno, uređenih parova cijelih brojeva kojima je bar jedna koordinata jednaka nuli ima 8065 (jer smo uređeni par (0,0) računali dvaput). Konačno, traženi broj je jednak $8\,124\,480 + 8065 = 8132545$.

993. Razlika dva broja djeljiva je sa 7 ako ti brojevi pri dijeljenju sa 7 daju iste ostatke. Pri dijeljenju sa 7 postoji sedam mogućih ostataka: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6. Pretpostavimo suprotno, tj. da ne postoji 15 brojeva sa zadanom osobinom. To znači da ne postoji više od 14 brojeva koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 0, da ne postoji više od 14 brojeva koji pri dijeljenju sa 7 daju ostatak 1, odnosno ostatke: 2, 3, 4, 5, 6. Tada nema ukupno više od 14·7=98 brojeva, što je suprotno pretpostavci. Dakle, postoji 15 brojeva među 100 zadanih sa traženom osobinom.

994. Neka je $a > b$. Prema uslova zadatka je $\frac{c^2\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab}{2}$, sl. 345. Kako je $c^2 = a^2 + b^2$ (Pitagorina teorema), dobijamo $\frac{(a^2+b^2)\sqrt{3}}{4} + \frac{b^2\sqrt{3}}{4} = \frac{a^2\sqrt{3}}{4} + \frac{ab}{2}$ i poslije sređivanja: $a = b\sqrt{3}$. Uvrštavanjem ove jednakosti u relaciju $c^2 = a^2 + b^2$ slijedi $c = 2b$. Tražena razmjera dužina hipotenuze i kraće katete je $c : b = 2 : 1$.

995. Neka je *x* broj šahista koji su započeli turnir. Kako su dvojica napustili turnir, preostalih $x - 2$ su međusobno odigrali $\frac{(x-2)(x-3)}{2}$ partija. Sa 6 partija koje su odigrali šahisti koji su napustili turnir, imamo da je: $\frac{(x-2)(x-3)}{2} + 6 = 84$, ili, poslije transformisanja $x^2 - 5x - 150 = 0$. Ovu jednačinu transformišemo na sljedeći način: $x^2 - 5x - 150 = 0$; $x^2 - 15x + 10x - 150 = 0$; $x(x-15) + 10(x-15) = 0$; $(x-15)(x+10) = 0$. Dakle, $x = 15$ ili $x = -10$. Očigledno da drugo rješenje otpada, pa zaključujemo da je turnir započelo 15 šahista.

996. Na pravougle trouglove *ABC, AEC* primjenimo Pitagorinu teoremu:
$a^2 + b^2 = c^2$ (1); ${t_a}^2 = b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2$ (2);
${t_b}^2 = a^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2$ (3). Sabiranjem jednakosti (2) i (3) dobijamo:
${t_a}^2 + {t_b}^2 = a^2 + b^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \frac{5}{4}(a^2 + b^2) = \frac{5}{4}c^2$. Kako je $c = 2t_c$, to je ${t_a}^2 + {t_b}^2 = 5{t_c}^2$.

997. Ispišimo nekoliko prvih članova tog niza: $2, 3, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 2, 3, \dots$. Kako je $a_7 = a_1$ i $a_8 = a_2$, a svaki sljedeći člana se dobija iz dva prethodna zaključujemo da se članovi niza ponavljaju sa periodom 6. Kako 2017 pri dijeljenju sa 6 daje ostatak 1, to je 2017-ti član niza jednak prvom članu, tj. $a_{2017} = a_1 = 2$.

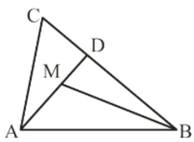
998. Prema uslovima zadatka brojevi $x-1$, $x-2$, $x-3$ i $x-4$ su uzastopni cijeli brojevi. Kako je $360 = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ i $360 = -3 \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-6)$, to su rješenja jednačine $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 360$:

$(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$, pa je $x = 7$.

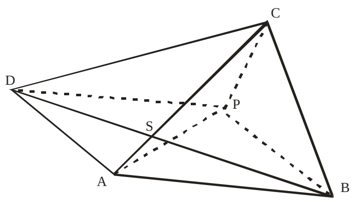
Takođe je $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) = -3 \cdot (-4) \cdot (-5) \cdot (-6)$, pa je $x = -2$.

999. a) Posmatrajmo nejnepovoljniji raspored izvlačenja kuglicam a to je da izvlačimo kuglice različitih boja, Tada je broj izvlačenja $3 \cdot 4 + 1 = 13$ kuglica
b) Posmatrajmo nejnepovoljniji raspored izvlačenja kuglicam a to je da izvlačimo kuglice od koje po jedna kuglica nije svake boje. Tada je broj izvlačenja $40 + 30 + 20 + 1 = 91$ kuglica
c) Broj izvlačenja $10 + 30 + 40 + 6 = 86$ kuglica.
d) Posmatrajmo nejnepovoljniji raspored izvlačenja kuglicam a to je da izvlačimo kuglice koje nisu žute boje, tada je broj izvlačenja $10 + 20 + 30 + 5 = 65$ kuglica.

1000. Neka je D presjek duži AM i BC, sl. 346. Tada je:
a) $\sphericalangle AMB > \sphericalangle ADB > \sphericalangle ACB$.
b) $AM + MB < AM + MD + DB = AD + DB < AC + CD + DB = AC + CB$



Sl. 346



Sl. 347

1001. Treba dokazati da je tražena tačka presjek dijagonala četverougla. Pretpostavimo da to nije presjek dijagonala, već proizvoljna tačka P, Sl. 347. Tada iz trougla APC imamo da je $AP + PC = AS + SC$. Iz trougla BDP je $BP + DP > BD = BS + SD$. Sabirajući ove nejednakosti dobijamo: $AP + BP + CP + DP > AS + BS + CS + DS$, pa je presjek dijagonala tražena tačka.

1002. Svaka nula dobija se kao proizvod jedne dvojke i jedne petice. Kako dvojki, u faktorizaciji ovih brojeva, ima više nego petica, to je dovoljno prebrojati petice. Brojevi koji su djeljivi sa 5 ima ukupno $100 : 5 = 20$. Među njima su i brojevi 25, 50, 75 i 100, koji su djeljivi sa 25 i u svojoj faktorizaciji imaju po dvije 5. Dakle, proizvod $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 98 \cdot 99 \cdot 100$ sadrži $20 + 4 = 24$ petice, pa se taj proizvod završava sa 24 nule.

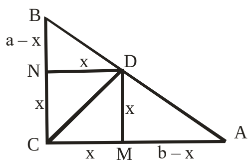
1003.

$$\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}}} < 3/^2 \Leftrightarrow 6+\sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < 9 \Leftrightarrow \sqrt{6+\sqrt{6+\sqrt{6}}} < 3/^2$$

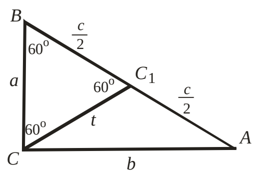
$$\Leftrightarrow 6+\sqrt{6+\sqrt{6}} < 9 \Leftrightarrow \sqrt{6+\sqrt{6}} < 3/^2 \Leftrightarrow 6+\sqrt{6} < 9 \Leftrightarrow \sqrt{6} < 3/^2 \Leftrightarrow 6 < 9 \Leftrightarrow \top$$

1004. Neka je x broj stranica koje je Dajana pročitala prvi dan. Drugi dan je pročitala $1{,}2x$ stranica, treći $1{,}44x$ i četvrti dan $1{,}728x$ stranica. Prema uslovima zadatka je $x + 1{,}728x = 1{,}2x + 1{,}44x + 11$, pa je $x = 125$. Prema tome, Dajana je prvi dan pročitala 125, drugi dan 150, treći dan 180 i četvrti dan 216 stranica; knjiga ima 671 stranicu.

1005. Neka su M i N podnožja normala iz tačke D , sl. 348. Kako duž polovi prav ugao kod tjemena C, to je četverougao $MDNC$ kvadrat stranice x. Kako je $P_{ABC} = P_{ADC} + P_{BCD}$, to je $\frac{ab}{2} = \frac{ax}{2} + \frac{bx}{2}$; $x = \frac{ab}{a+b}$. Kako je CD dijagonala kvadrata $MDNC$, to je $CD = \frac{ab}{a+b} \cdot \sqrt{2}$.



Sl. 348



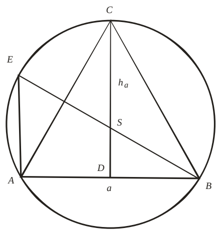
Sl. 349

1006. $a = 2^{2018} - 2^{2017} + 2^{2016} = 2^{2016} \cdot (2^2 - 2 + 1) = 3 \cdot 2^{2016}$;
$b = 2^{2017} - 2^{2018} + 2^{2019} = 2^{2017} \cdot (1 - 2 + 2^2) = 3 \cdot 2^{2017} = 6 \cdot 2^{2016}$;
$c = \sqrt{3} \cdot (2^{2016} + 2^{2017}) = \sqrt{3} \cdot 2^{2016} \cdot (1 + 2) = 3 \cdot \sqrt{3} \cdot 2^{2016}$.
Neka je $2^{2016} = x$. Tada je $a^2 = 9 \cdot x^2$, $b^2 = 36 \cdot x^2$, $c^2 = 27 \cdot x^2$ i $a^2 + b^2 = c^2$.

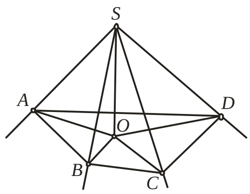
1007. Prema uslovima zadatka trougao BCC_1 je jednakostranični stranice t, sl. 349, te je $AB = 2t$ i $AC = \sqrt{AB^2 - BC^2} = \sqrt{4t^2 - t^2} = \sqrt{3} \cdot t$
Dalje je $P = \frac{CB \cdot CA}{2} = \frac{t \cdot \sqrt{3} \cdot t}{2} = \frac{t^2 \cdot \sqrt{3}}{2}$; $O = 3t + \sqrt{3} \cdot t = t(3 + \sqrt{3})$.

1008. Trećina prve brigade za jedan dan uradi $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{10}=\frac{1}{30}$ dijela posla. Jedan dio druge brigadeza jedan dan uradi $\frac{x}{15}$ dijela posla. Obje brigade za jedan dan urade $\frac{1}{12}$ dijela posla. Na osnovu toga formiramo jednačinu: $\frac{1}{3}+\frac{x}{15}=\frac{1}{12}$, čije je rješenje $x=\frac{3}{4}$. Dio drugi brigade koji je angažovan, izraženo u procentima, je 75%.

1009. Neka je S centar kruga koji je opisan oko trougla ABC i neka je BE prečnik opisane kružnice, sl. 350. Iz trougla DBS slijedi $DS=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$. Kako je i $CD=CS+DS$, to je $a=R+\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$; $a-R=\sqrt{R^2-\frac{a^2}{4}}$ pa je $a^2-2aR+R^2=R^2-\frac{a^2}{4}$; tj. $5a^2-8aR=0$; $5a(a-8R)=0$. Odavde dobijamo $a=0$ i $R=\frac{5a}{8}$. Dakle, rješenje je $R=\frac{5a}{8}$.



Sl. 350



Sl. 351

1010. Trouglovi SAB, SBC, SCD, SDA su jednakostranični, pa je $AB=BC=CD=DA$. Četverougao $ABCD$ je romb ili kvadrat. Neka je O podnožje visine S na ravan četverougla $ABCD$. Pravougli trouglovi SOA, SOB, SOC, SOD su podudarni, pa je $OA=OB=OC=OD$. Slijedi da se oko četverougla $ABCD$ može opisati krug, pa je to kvadrat. Znači dvije strane triedra sa vrhom A su po 60^0, a treća je prav ugao, sl. 351.

1011. Transformišimo datu jednakost: $(x-1)^2+(y+2)^2+(z-3)^2=3$. Prema uslovima zadatka to je moguće ako je svaki sabirak jednak 1 i sve trojke x, y, z rješenja su kombinacije rješenja jednačina $|x-1|=1$, $|y+2|=1$, $|z-3|=1$. Rješenja ovih jednačina su $x=0$ ili $x=2$, $y=-1$ ili $y=-3$, $z=2$ ili $z=4$. Dakle, skup cjelobrojnih rješenja jednačine $x^2+y^2+z^2-2x+4y-6z=17$ je $\{(0,-1,2),(0,-1,4),(0,-3,-2),(0,-3,4),(2,-1,2),(2,-1,4),(2,-3,2),2,-3,4)\}$

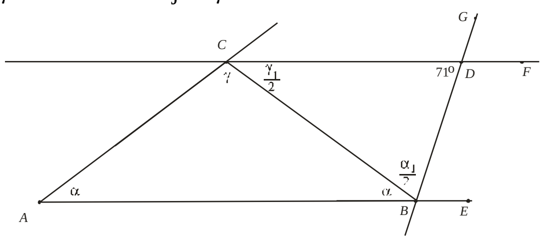
1012. Neka su $x-2$, $x-1$, x, $x+1$, $x+2$ pet uzastopnih prirodnih brojeva. Tada je $(x-2)^2+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+1)^2=5x^2+10=5(x^2+2)$. Dakle, izraz $(x-2)^2+(x-1)^2+x^2+(x+1)^2+(x+1)^2$ je djeljiv sa 5. Kada bi izraz $5(x^2+2)$ bio djeljiv sa 25, to bi činilac x^2+2 morao biti djeljiv brojem 5. Dakle, $x^2+2\in\{5,10,15,20,\dots\}$, odnosno $x^2\in\{3,8,13,18,\dots\}$. Kako kvadrat prirodnog broja djeljivog brojem 5 ne završava cifrom cifrom 3 niti cifrom 8, to znači da činioc x^2+2 nije djeljiv brojem 5, niti izraz $5(x^2+2)$ brojem 25.

1013. Prosti brojevi veći od 3 su neparni, pa su i brojevi a i b neparni. Njihov zbir $a+b$ i njihova razlika $a-b$ su parni brojevi. Proizvod $(a+b)\cdot(a-b)$ djeljiv je sa 4. Pri dijeljenju sa 3 brojevi a i b mogu imati ostatak 1 ili 2. Ako imaju isti ostatak onda je razlika $a-b$ djeljiva sa 3, a ako imaju različite ostatke, onda je zbir $a+b$ djeljiv sa 3. U svakom slučaju proizvod $(a+b)\cdot(a-b)$ je djeljiv sa 3. Kako je proizvod $(a+b)\cdot(a-b)$ djeljiv i sa 4 i sa 3, djeljiv je i sa 12.

1014. Ukupna zapremina soka od jabuke je dva puta veća od zapremine soka od borovnice, pa je mjerni broj ukupne zapremine soka djeljiv sa 3. Ukupna zapremina svih galona je 74 litra. Broj 74 pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 2. Jedini takav galon je onaj galon čiji mjerni broj zapremine pri dijeljenju sa 3 daje ostatak 2. Jedini takav galon je onaj čija je zapremina 14 litara. Slijedi da je ukupna zapremina soka 60 litara. Znači da soka od borovnice ima 20 litara, a soka od jabuka 40 litara. Sokom od borovnice su napunjeni galoni od 7 i 13 litara. Sokom od jabuke su napunjeni galoni od 9, 15 i 16 litara.

1015. Ako je $x=0,\overline{ababab\ldots}$, onda je $100x=ab,\overline{abab\ldots}$. Iz ovih jednakosti dobijamo da je $99x=\overline{ab}$, odnosno $x=\frac{\overline{ab},}{99}=\frac{10\cdot a+b}{9\cdot 11}$. Kako je zbir brojioca i imenioca nesvodljivog razlomka 17, to broj $10\cdot a+b$ mora biti djeljiv sa 9 ili sa 11. Ako je $10\cdot a+b$ djeljiv sa11. onda je $10\cdot a+b=11\cdot(17-9)=88$ što je suprotno pretpostavci zadataka da je $a\neq b$, ovo ne može biti rješenje. Ako je $10\cdot a+b$ djeljiv sa 9. onda je $10\cdot a+b=9\cdot(17-11)=54$, odakle je $a=5$ i $b=4$. Direktnim provjeravanjem dobijemo da su upravo to tražena rješenja.

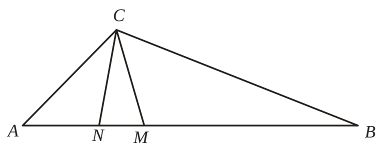
1016. Neka je $\sphericalangle CAB=\sphericalangle CBA=\alpha$, $\sphericalangle ACB=\gamma$, $\sphericalangle DCB=\frac{\gamma_1}{2}$, $\sphericalangle CBD=\frac{\alpha_1}{2}$, a tačka D presjek simetrala spoljašnjeg ugla α_1 i spoljašnjeg ugla γ_1, sl. 352. Kako je $\frac{\gamma_1}{2}=\alpha$, tj. $\sphericalangle DCB=\sphericalangle ABC$. Dalje slijedi da je $DE \parallel AB$, pa zaključujemo da su uglovi $\sphericalangle EBD$ i $\sphericalangle FDG$ jednaki (saglasni uglovi), tj. $\sphericalangle EBD=\sphericalangle FDG=\frac{\alpha_1}{2}$. Dalje slijedi da su i uglovi $\sphericalangle CBD$ i $\sphericalangle CDB$ jednaki, tj. $\sphericalangle CBD=\sphericalangle CDB=71^\circ$, pa je $\alpha_1=142^\circ$ i $\alpha=38^\circ$. Iz $\gamma+2\alpha=180^\circ$ slijedi $\gamma=104^\circ$.



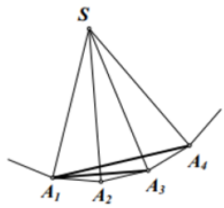
Sl. 352

1017. Na osnovu zbira uglova u trougle ABC važi $\sphericalangle ACB=120^\circ$. Nek je N tačka na stranici AB takva da je $BN=BC$, sl. 353. Trougao BCN je jednakokraki pa je $\sphericalangle BNC=\sphericalangle BCN=80^\circ$. Kako je CM simetrala $\sphericalangle ACB$, to je $\sphericalangle ACM=60^\circ$. Na osnovu zbira unutrašnjih uglova u trouglu AMC je $\sphericalangle AMC=80^\circ$. Dakle, trougao NCM je jednakokraki i $NC=CM$. Ugao $\sphericalangle BNC$ je spoljašnji ugao trougla ACN, odakle je

$\sphericalangle ACN = \sphericalangle BNC - \sphericalangle CAN$, tj $\sphericalangle ACN = 40^o$. Dakle, trougao ANC je jednakokraki pa je $AN = NC$. Znači, $CM = NC = AN = AB - BN = AB - BC = 10\ cm$.



Sl. 353.

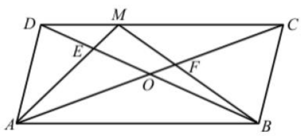


Sl. 354.

1018. Iz teksta se može zaključiti da je Anđela starija od Jovana. Neka Jovan sada ima x godina, a Anđela $x + y$ godina (Anđela je starija y godina). Anđela je imala godina kao Jovan sada (x) prije y godina. Jovan je tada imao $x - y$ godina. Prvi uslov zadatka daje jednačinu $1{,}2 \cdot (x - y) = x + y$ pa sređivanjem dobijemo $x = 11y$. Ako Jovan sada ima x godina, a Anđela $x + y$, Jovan će za y godina imati godina kao Anđela sada. Jovan će tada imati $x + y$, a Anđela će imati $x + 2y$. Iz drugog uslova zadatka slijedi: $x + y + x + 2y = 150$; $2x + 3y = 150$. Uvrštavanjem $x = 11y$ dobija se $22y + 3y = 150$, pa je $y = 6$. Tada je $x = 11 \cdot 6 = 66$ i $x + y = 66 + 6 = 72$. Jovan ima 66 godina, a Anđela 72 godine.

1019. Neka je α unutrašnji ugao, a α_1 susjedni spoljašnji ugao zadanog pravilnog mnogougla. Iz uslova zadatka važi $\alpha = 9 \cdot \alpha_1$ i $\alpha + 9 \cdot \alpha_1 = 180^o$, pa je $\alpha_1 = 18^o$. Tada je $\alpha = 180^o - 18^o = 162^o$. U pravilnom mnogouglu svi su spoljašnji uglovi jednakih veličina, a zbir im je 360^o. Iz $18 \cdot n = 360^o$ dobijamo $n = 20$; dvadesetougao. Na sl. 354 je skica dijela dvadesetougla . Kako je $\sphericalangle A_1SA_2 = 360^o : 2 = 18^o$, onda je $\sphericalangle A_1SA_3 = 2 \cdot 18^o = 36^o$ i $\sphericalangle A_1SA_4 = 3 \cdot 18^o = 54^o$. Iz jednakokrakog trougla A_1A_3S se izračuna $\sphericalangle A_3A_1S = (180^o - 36^o) : 2 = 72^o$. Iz jednakokrakog trougla A_1A_4S se izračuna $\sphericalangle A_4A_1S = (180^o - 54^o) : 2 = 63^o$, pa je $\sphericalangle A_3A_1A_4 = \sphericalangle A_3A_1S - \sphericalangle A_4A_1S = 72^o - 63^o = 9^o$.

1020. Površina trougla ABM jednaka je polovini površine paralelograma $ABCD$: $P_{ABM} = \frac{1}{2}S$, jer paralelogram $ABCD$ i trougao ABM imaju jednaku stranicu i odgovarajuće visine, sl. 355. Na isti načinje $P_{COD} = \frac{1}{4}S$, jer paralelogram $ABCD$ i trougao COD imaju jednaku jednu stranicu, a visina trougla je polovina visine paralelograma. Uočimo petougao $ABCOD$, pa je $P_{\text{ABCOD}} = P_{\text{ABCD}} - P_{COD} = s - \frac{1}{4}S = \frac{3}{4}S$. Takođe je $P_{\text{ABCOD}} = (P_{\text{AED}} - P_{\text{BCF}}) + P_{\text{ABFOE}} = \frac{1}{3}S + \frac{1}{2}S - P_{\text{EOFM}} = \frac{5}{6}S - P_{\text{EOFM}}$. Dalje je: $\frac{3}{4}S = \frac{5}{6}S - P_{\text{EOFM}}$, odakle je $P_{\text{EOFM}} = \frac{5}{6}S - \frac{3}{4}S = \frac{1}{12}S$.



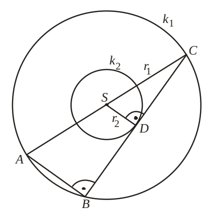
Sl. 355.

1021. Neka je traženi broj $\overline{ab}$. Tada prema uslovima zadatka važi:
$10a + b = 6(a + b) + 2$ i $10a + b = 5ab + 2$. Odavde je: $6(a + b) + 2 = 5ab + 2$; $6(a + b) = 5ab$. Kako je desna strana jednakosti djeljiva sa 5, onda je ilijeva strana djeljiva sa 5. Kako su a i b cifre, znači da je $a + b = 5$, $a + b = 10$ ili $a + b = 15$. Ako je je $a + b = 5$, onda iz $6 \cdot 5 = 5ab$ imamo da je $ab = 6$ i moguća rješenja su $(a, b) = (3{,}2)$ i $(a, b) = (2{,}3)$. Provjerom utvrđujemo da je $\overline{ab} = 32$.
U slučaju $a + b = 10$ dobijamo $6 \cdot 10 = 5ab$, odakle je $ab = 12$. Rješenja ove jednačine, prema uslovima zadatka, su $(a, b) = (2{,}6)$, $(a, b) = (6{,}2)$, $(a, b) = (3{,}4)$ i $(a, b) = (4{,}3)$. Provjerom utvrđujemo da uovom slučajunema rješenja, tj. ni jedan od brojeva $26, 62$, 34 i 43 ne zadovoljavaju uslove zadatka. U slučaju $a + b = 15$ dobijamo $6 \cdot 15 = 5ab$, tj. $ab = 18$ pa su rješenja $(a, b) = (2{,}9)$, $(a, b) = (9{,}2)$, $(a, b) = (3{,}6)$ i $(a, b) = (6{,}3)$. Ni u ovom slučaju nema rješenja. Dakle, $\overline{ab} = 32$.

1022. Neka je x broj osoba. Iz uslova zadatka zaključujemo da je $x > 3$. Svaka osoba trebalo je da primi $\frac{480}{x}\ KM$. Ako se troje njih odrekne svog dijela preostalo je $x - 3$ osobe koje dijele novac, pa svako teba da dobije $\frac{480}{x-3}\ KM$. Na osnovu toga zaključujemo da će biti $\frac{480}{x-3} = \frac{480}{x} + 8$, pa je $\frac{60}{x-3} = \frac{60+x}{x}$. Odavde dobijamo da je $x^2 - 3x - 180 = 0$; $(x - 15)(x + 12) = 0$. Rješavanjem ove jednačine i uvažavanjem uslova zadatka slijedi da je rješenje broj 15. Dakle, traženi broj osoba je 15.

1023. Ako je korijen prirodan broj, onda broj pod korijenom takođe mora biti prirodan broj. Neka je $x = \frac{a+64}{a-64}$. Tada je $a = 64 + \frac{128}{x-1}$. Broj $x - 1$ mora biti djeljitelj broja 128. Kako su x i a prirodni brojevi uočimo prirodne brojeve djelitelje broja 128: 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64 i 128, pa je $x - 1 \in \{1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128\}$; $x \in \{2, 3, 5, 9, 17, 33, 65, 129\}$. Među ovim brojevima jedino je 9 korijen prirodnog broja pa je, za $x = 9$. $a = 80$.

1024. Neka je S centar kružnica, a D dodirna tačka tangente BC i kružnice k_2, sl. 356. Neka su r_1 i r_2, redom, poluprečnici kružnica k_1 i k_2. Tada je $r_1 = SC$ i $r_2 = SD$ i, prema uslovima zadatka, $r_1 : r_2 = 3 : 1$, tj. $r_1 = 3 \cdot r_2$. Periferijski ugao ABC nad prečnikom AC je prav ugao. Dakle, trougao ABC je pravougli. Tetiva BC kružnice k_1 je ujedno i tangenta kružnice k_2 te je normalna na poluprečnik SD. Dakle i trougao SDC je pravougli. Trouglovi ABC i SDC su slični (imaju zajednički ugao kod tjemena C i po prav ugao. Iz sličnosti trouglova slijedi $AB : SD = AC : SC$, pa je $8 : r_2 = 6 \cdot r_2 : 3 \cdot r_2$; $r_2 = 4\ cm$ i $r_1 = 3 \cdot r_2 = 12\ cm$. Kako je $P_{ABC} = \frac{AB \cdot BC}{2}$, $AB = 8\ cm$ i $BC = 16 \cdot \sqrt{2}\ cm$ (Pitagorina teorema), to je $P_{ABC} = \frac{8 \cdot 16 \cdot \sqrt{2}}{2} = 64 \cdot \sqrt{2}\ cm^2$.



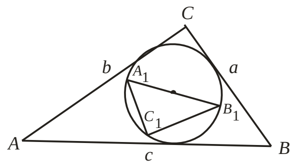
Sl. 356

1025. Označimo broj tačaka na drugoj pravoj sa x. Kako je na prvoj pravoj 8 tačaka, onda one određuju $\frac{8 \cdot 7}{2} = 28$ duži. Svaka od ovih duži sa svakom od x tačaka na drugoj pravoj čii jedan trougao. Takvih trouglova je $28 \cdot x$. Na drugoj pravoj x

tačaka određuje $\frac{x\cdot(x-1)}{2}$ duži. Svaka ova duž sa svakom od 8 tačaka na prvoj pravoj čini trougao. Takvih trouglova je $\frac{x\cdot(x-1)}{2}\cdot 8 = x\cdot(x-1)\cdot 4 = 4x^2-4x$. Ukupan broj trouglova 640 pa je $4x^2-4x=640$; $4x^2-4x=640 \Leftrightarrow (x+16)(x-10)=0$ to su $x=-16$ i $x=10$ rješenja rjednačine. Prema uslovima zadatka x je prirodan broj te je na drugoj pravoj 10 tačaka.

1026. Kako je $a^3-1=(a-1)(a^2+a+1)=0$, to je $a^3-1=0$ jer je, prema uslovu zadatka, $a^2+a+1=0$, pa je $a^3=1$. Dalje računamo:
$a^{2018}+\frac{1}{a^{2018}}=\frac{a^{2019}}{a}+\frac{1}{a^{2019}}\cdot a=\frac{(a^3)^{673}}{a}+\frac{1}{(a^3)^{673}}\cdot a=\frac{1^{673}}{a}+\frac{1}{1^{673}}\cdot a=\frac{1}{a}+a=\frac{a^2+1}{a}$.
Kako je $a^2+a+1=0$, to je $a+1=-a^2$, pa je $a^{2018}+\frac{1}{a^{2018}}=\frac{a^2+1}{a}=\frac{-a}{a}=-1$.

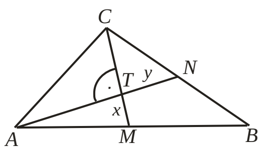
1027. Hipotenuza pravouglog trougla ABC je $c=25\ cm$. Takođe, $P_{ABC}=150\ cm^2$. Kako je $P_{ABC}=r\cdot s$, gdje je r poluprečnik upisanog kruga u trougao ABC, sl. 357, a s poluobim trougla dobijamo da je $s=30\ cm$ i $r=5\ cm$. Dalje, prema uslovima zadatka, dobijamo da je $A_1B_1=c_1=2\cdot r=10\ cm$. Iz odnosa $k=c:c_1=25:10=2{,}5$ određujemo koeficijent sličnosti za trouglove ABC i $A_1B_1C_1$; $k=2{,}5$ i važi $a_1=B_1C_1=6\ cm$ i $b_1=A_1C_1=8\ cm$. Kako je $O_{ABC}=k\cdot O_{A_1B_1C_1}$ i $P_{ABC}=k^2\cdot P_{A_1B_1C_1}$, dobijamo $O_{A_1B_1C_1}=24\ cm$ i $P_{A_1B_1C_1}=24\ cm^2$.



Sl. 357

1028. Iz datih uslova je $b=\frac{3}{2}a$, $d=\frac{5}{3}a$, $c=\frac{5}{6}b=\frac{5}{4}a$. Zamjenom ovih vrijednosti u jednačini $2d-a-c=26$ dobijamo da je $\frac{10}{3}a-a-\frac{5}{4}a=26$, tj. $\frac{13}{12}a=26$. Odavde slijedi da je $a=24$, pa dalje redom dobijamo $b=36$, $c=30$ i $d=40$.

1029. Označimo sa T težište trougla ABC, sl. 358. Kako je MN srednja linija ovog trougla, to je $AC=2MN$. Neka je $TM=x$ i $TN=y$. Tada je $AT=2y$ i $CT=2x$. Iz uslova da je $AM\perp CN$ slijedi da su trouglovi MNT, ATM i CTN pravougli, pa na osnovu Pitagorine teoreme slijedi: $x^2+y^2=MN^2$, $4y^2+x^2=4$, $4x^2+y^2=\frac{9}{4}$ (1) Sabiranjem druge i treće od ovih jednakosti dobijamo $5(x^2+y^2)=\frac{25}{4}$; $x^2+y^2=\frac{5}{4}$. Sad iz $x^2+y^2=MN^2$ slijedi da je $MN=\frac{\sqrt{5}}{2}$, pa je $AC=\sqrt{5}$.

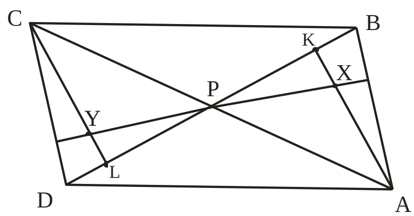


Sl. 358

1030. Neka za proste brojeve p i q važi $p^2-17q^2=16$. Tada je $(p-4)(p+4)=17q^2$. (1) Očito je $p\neq 3$, pa kako je p prost broj slijedi da je $p\equiv 1(mod\ 3)$ ili $p\equiv 2(mod\ 3)$. Zbog toga je jedan od brojeva $p-4$ i $p+4$ djeljiv sa 3. Iz (1) slijedi da je q^2 djeljiv sa 3, pa kako je q prost broj, to je $q = 3$. Dalje dobijamo da je $p^2 = 169$, tj. $p = 13$.

1031. Neka su K, L redom presječne tačke pravih AX i CY sa dijagonalom BD, sl. 359. Posmatrajmo trouglove PKX i PLY. Oba ugla $\sphericalangle PKX$ i $\sphericalangle PLY$ su pravi. Uglovi $\sphericalangle XPK$ i $\sphericalangle YPL$ su unakrsni, pa su jednaki. Kako je $PX = PY$, slijedi da su trouglovi PKX i PLY podudarni (stav SUU) pa slijedi $PK = PL$. Sada posmatrajmo trouglove PAK i PCL. Oba ugla $\sphericalangle AKP$ i $\sphericalangle CLP$ su pravi. Uglovi $\sphericalangle KPA$ i $\sphericalangle LPC$ su unakrsni, pa su jednaki. Kako je već pokazano da je $PK = PL$, to su trouglovi PAK i PCL podudarni (stav USU). Iz ove podudarnosti slijedi da je $AP = PC$. Slično je $BP = PD$. Dakle, dijagonale četverougla $ABCD$ se polove, pa je on paralelogram.

1032. Na turniru je odigrano $\frac{(n+2)(n+1)}{2}$ partija i ukupno je osvojeno isto toliko poena. Iz satog uslova slijedi da je n učenika devetog razreda osvojilo zajedno $\frac{(n+2)(n+1)}{2} - 6 = \frac{n^2+3n-10}{2}$ poena. Odavde i iz uslova da su svi učenici devetog razreda osvojili podjednak broj poenam, slijedi da je $n^2 + 3n - 10$ djeljiv sa n, pa $n|10$. Dalje, iz uslova da su dva učesnika turnira zajedno osvojila 6 poena, slijedi da je $n > 2$. Dakle, $n = 5$ ili $n = 10$.



Sl. 359

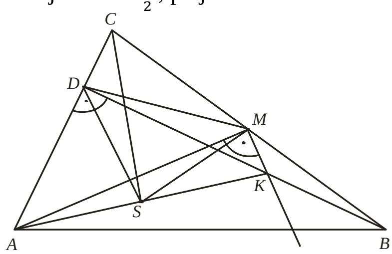
1033. Na turniru je odigrano $\frac{12\cdot 11}{2} = 66$ utakmica i osvojeno su $2 \cdot 66 = 132$ boda. Pretpostavimo suprotno, da je posljednja ekipa na tabeli osvojila bar tri pobjede. Tada je ona osvojila bar 6 bodova, a kako su sve ekipe imale različit broj osvojenih bodova, pretposljednja ekipa je osvojila najmanje 7 bodova, itd, prva ekipa na tabeli je osvojila najmanje 17 bodova. Odavde slijedi da ukupan broj osvojenih bodova svih 12 ekipa nije manji od $6 + 7 + \cdots + 17 = 138$. Kako je $138 > 132$, dobili smo kontradikciju.

1034. Iz datih uslova je: $a^2 + 1 = b^4 - 1$, $b^2 + 1 = c^4 - 1$, $c^2 + 1 = a^4 - 1$,
$a^2 + 1 = (b^2 - 1)(b^2 + 1)$, $b^2 + 1 = (c^2 - 1)(c^2 + 1)$, $c^2 + 1 = (a^2 - 1)(a^2 + 1)$.
Množenjem posljednje tri jednakosti dobijamo:
$(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1) = (a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1)(a^2 + 1)(b^2 + 1)(c^2 + 1)$;
$(a^2 - 1)(b^2 - 1)(c^2 - 1) = 1$.

1035. Razmatraćemo odvojeno tri slučaja
$n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$, $k \in N \cup \{0\}$.
1° $\underline{n = 3k}$.

Tada je $7^{2n}-48n-1=7^{6k}-144k-1=49^{3k}-144k-1$.
Kako je $49^{3k}\equiv 4^{3k}\equiv 1(mod\ 9)$ i $144k\equiv 0(mod\ 9)$, to je u ovom slučaju $7^{2n}-48n-1\equiv\ 0(mod\ 9)$.
2^{o} $\underline{n=3k+1}$.
Tada je $7^{2n}-48n-1=7^{6k+2}-48(3k+1)-1=49\cdot 7^{6k}-144k-49$. Kako je $49\cdot 7^{6k}\equiv 4(mod\ 9)$, $144k\equiv 0(mod\ 9)$ i $49\equiv 4(mod\ 9)$ to je u ovom slučaju $7^{2n}-48n-1\equiv\ 0(mod\ 9)$
3^{o} $\underline{n=3k+2}$.
Tada je $7^{2n}-48n-1=7^{6k+4}-48(3k+2)-1=7^4\cdot 7^{6k}-144k-97$.
Kako je $7^4\equiv 7(mod\ 9)$, $\cdot\, 7^{6k}\equiv 1(mod\ 9)$, $144k\equiv 0(mod\ 9)$ i $97\equiv 7(mod\ 9)$, i u ovom slučaju je $7^{2n}-48n-1\equiv\ 0(mod\ 9)$.

1036. Kako je $\sphericalangle ADK=90^0$ i $\sphericalangle KMA=90^0$, tačke A, K, M, D leže na kružnici k čiji je prečnik AK, sl. 360. Označimo sa S, centar ove kružnice. Iz $\sphericalangle MAD=30^0$ slijedi da je $\sphericalangle MSD=60^0$, pa kako su SM i SD poluprečnici kružnice k, toje $SM=SD$, što znači da je trougao MSD jednakostraničan. Zbog toga je $DM=\frac{AK}{2}$. Iz pravouglog trougla BCD imamo da je $DM=\frac{BC}{2}$, pa je $AK=BC$.



Sl. 360

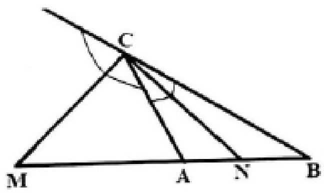
1037. Na osnovu datih uslova iz identiteta $a^2+b^2+c^2+d^2=(a+b+c+d)^2-(a+b)\cdot(c+d)-(a+c)\cdot(b+d)-(a+d)\cdot(b+c)$ dobijamo da je $a^2+b^2+c^2+d^2=(a+b+c+d)^2-9$.
Kako je $(a+b+c+d)^2\geq 4(a+d)(b+c)=16$, to je $a^2+b^2+c^2+d^2\geq 7$.

1038. 1) $x<-1\Rightarrow x<\frac{1}{x}$; 2) $-1<x<0\Rightarrow x>\frac{1}{x}$; 3) $0<x<-1\Rightarrow x<\frac{1}{x}$; 4) $x>1\Rightarrow x>\frac{1}{x}$; 5) $(x=-1\ i\ x=1)\Rightarrow x=\frac{1}{x}$.

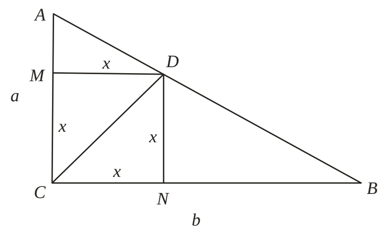
1039. Iz jednakosti $\alpha=\frac{3}{5}\beta=0{,}3\gamma=k$ slijedi $\alpha=k,\ \beta=\frac{5}{3}k, \gamma=\frac{10}{3}k$. Tada iz jednakosti $\alpha+\beta+\gamma=180^{O}$ slijedi $k+\frac{5}{3}k+\frac{10}{3}k=180^{O}$, pa je $k=30^{O}$. Tada je $\alpha=30^{O}$, $\beta=50^{O}, \gamma=100^{O}$.

1040. Da bi broj $199a7b$ bio djeljiv sa 12 mora biti djeljiv i sa 4 i sa 3. Da bi bio djeljiv sa 4 cifra b mora biti 2 ili 6. Ako je $b=2$ tada, zbog djeljivosti broja $199a72$ sa 3, cifra a može biti $2, 5$ ili 8, a to su brojevi 199272, 199572 i 199872. Ako je $b=6$, tada, zbog djeljivosti broja $199a76$, cifra a može biti $1, 4$ ili 7, a brojevi su 199176, 199476 I 199776.

1041. Kako je $\alpha - \beta = 90^{\circ}$, to je $\alpha = \beta + 90^{\circ}$, odakle je α tup ugao, pa je trougao ABC tupougli, sl. 361. Takođe, važi $\beta = \alpha - 90^{\circ}$. Kako je $\alpha + \beta + \gamma = 180^{\circ}$, to zbog $\beta = \alpha - 90^{\circ}$, važi $\alpha + \alpha - 90^{\circ} + \gamma = 180^{\circ}$, pa je $\alpha + \frac{\gamma}{2} = 135^{\circ}$. Tada iz trougla ANC dobijamo $\alpha + \frac{\gamma}{2} + \measuredangle ANC = 180^{\circ}$, pa je $\measuredangle ANC = 45^{\circ}$. Kako se simetrale unutrašnjeg i spoljašnjeg ugla sijeku pod pravim uglom, to je trougao CMN pravougli sa $\measuredangle ANC = \measuredangle AMC = 45^{\circ}$, što znači da je trougao CMN jednakokrako pravougli pa je $CM = CN$.



Sl. 361.



Sl. 362.

1042. Rješenje nejednačine je $-2017 < x < 2019$. Zbir svih rješenja je:

$-2016 - 2015 - \cdots - 1 + 0 + 1 + \cdots + 2015 + 2016 + 2017 + 2018 =$

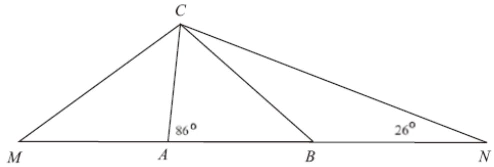
$2017 + 2018 = 4035$. Proizvod svih rješenja je jednak nuli, jer skupu rješenja pripada i broj nula.

1043. $4^{16} \cdot 5^{25} = 2^{32} \cdot 5^{25} = 2^{7} \cdot 2^{25} \cdot 5^{25} = 2^{7} \cdot 10^{25} = 128 \cdot 10^{25}$. Ovaj broj ima 28 cifara.

1044. Uočimo $180 = 1 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5$. Moguće kombinacije za četiri cifre koje daju proizvod 180 su $(1,4,5,9)$, $(1,6,6,5)$, $(2,2,5,9)$, $(2,3,5,6)$ i $(3,3,4,5)$.
Da bi traženi broj bio djeljiv sa 9, mora mi zbir cifara biti djeljiv sa 9, a to je slučaj kod kombinacija $(1,6,6,5)$ i $(2,2,5,9)$. Kako se traži najmanji broj to je onda moguće samo za kombinaciju $(1,6,6,5)$. Traženi broj je 1566.

1045. $NZS(4,5,6,7) = 420$. Ukupan broj bombona je oblika $n = k \cdot 420 + 1$. Na osnovu uslova zadatka: $500 < k \cdot 420 + 1 < 100$, slijedi $k = 2$. Ukupan broj bombona je 841. Kako je $841 = 29^{2}$, to je u 29 bombonjera spakovano po 29 bombona.

1046. Trougao BNC je jednakokraki, jer je $BN = BC$pa je $\sphericalangle BCN = \sphericalangle BNC = 26^{0}$, sl. 363. Kako je $\sphericalangle ABC = \beta = 52^{0}$ (spoljašnji ugao trougla BNC). Tada je $\sphericalangle ACB = \gamma = 44^{0}$. Kako je i trougao MAC jednakokraki, jer je $AM = AC$, onda je $\sphericalangle MCA = \sphericalangle CMA = 42^{0}$, pa je $\sphericalangle MCN = \sphericalangle MCA + \sphericalangle ACB + \sphericalangle BCN = 42^{0} + 44^{0} + 26^{0} = 112^{0}$.



sl. 363

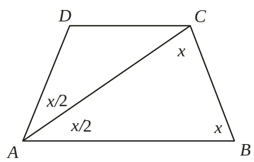
1047. Površina datog kvadrata je $P = 16\ cm^2$. Podijelimo dati kvadrat na 16 manjih jednakih kvadrata čije su stranice 1 cm, tj. površine 1 cm^2. Sve tačke pripadaju nekom od ovih manjih kvadrata, a kako je $35 : 16 = 2$ i ostatak 3 to na osnovu Dirihleovog principa slijedi da postoji kvadrat stranice 1 cm kojem pripadaju bar tri date tačke.

1048. Iz date jednakosti je $x^{2020} - x^{2019} + 2019$. Posmatrajmo sljedeće slučajeve:
a) Ako je x paran broj, onda su x^{2020} i x^{2019} parni brojevi pa im je i razlika paran broj što znači da jednačina u ovom slučaju nema rješenja.
b) Ako je x neparan broj, onda su x^{2020} i x^{2019} neparni brojevi pa im je razlika paran broj što i uovom slučaju znači da jednačina nema rješenja.

1049. Treba da bude $a \cdot b \cdot c \cdot d = a + b + c + d$. Neka je $a \leq b \leq c \leq d$. Tada je $a \cdot b \cdot c \cdot d \leq 4 \cdot d$. Svi brojevi ne mogu biti jednaki međusobno, jer jednačina $a \cdot b \cdot c \cdot d \leq 4 \cdot d$ postaje npr. $d^4 = 4 \cdot d$, a ova jednačina nema rješenja u skupu prirodnih brojeva. Dakle, nejednačina $a \cdot b \cdot c \cdot d \leq 4 \cdot d$ je oblika $a \cdot b \cdot c < 4$. Ova nejednakost u skupu prirodnih brojeva ima rješenja:
1) $a = b = c = 1$ ili 2) $a = b = 1$ i $c = 2$ ili 3) $a = b = 1$ i $c = 3$. Neposrednom provjerom utvrđujemo da je jedino rješenje $a = b = 1$, $c = 2$ i $d = 4$.

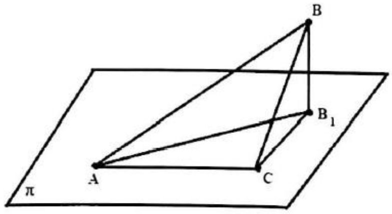
1050. Neka je, zajedno sa Oljom i njenim momkom, bilo n prisutnih. Svako se rukovao sa ostalih $(n - 1)$ prisutnih. To je ukupno $n \cdot (n - 1)$ rukovanja. Stvarni broj rukovanja je $n \cdot (n - 1): 2$, jer u broju $n \cdot (n - 1)$ svako rukovanje je računato duplo. Na osnovu jednačine $n \cdot (n - 1): 2 = 136$ dobijamo $n \cdot (n - 1) = 272$, odnosno $n \cdot (n - 1) = 17 \cdot 16$ pa je $n = 17$. Znači na Oljinom rođendanu je bilo 16 gostiju računajući i Oljinog momka.

1051. Označimo uglove na osnovici AB trapeza $ABCD$ sa x, pa je $\measuredangle ABC = \measuredangle BAD = x$, sl. 364. Trougao ABC je jednakokraki pa su mu uglovi na osnovici BC jednaki: $\measuredangle ABC = \measuredangle ACB = x$, a iz uslova zadatka je $\measuredangle CAB = \frac{x}{2}$. Iz jednačine $x + x + \frac{x}{2} = 180^{\circ}$ dobijamo $x = 72^{\circ}$. Kako je $\measuredangle ABC = \measuredangle BCD = 180^{\circ}$ dobijamo da je $\measuredangle BCD = 108^{\circ}$



Sl. 364.

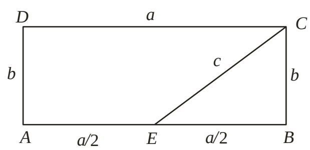
1052. Iz odnosa $AB : BC = 3:1$ dobijamo $AB = 3k$ i $BC = k$, sl. 365. Na osnovu Pitagorine teoreme je $(3k)^2 + k^2 = 4^2$; $k = \sqrt{2}$, tj. $BC = \sqrt{2}\ cm$. Trougao BCB_1 je jednakokraki pravougli, $\measuredangle BCB_1 = 45^{\circ}$, pa je $BC = BB_1 \cdot \sqrt{2}$, te je $BB_1 = 1\ cm$.



Sl. 365.

1053. Neka su traženi brojevi oblika $\overline{abcd}$.
a) Cifra a može imati vrijednost $2, 3$ i 4. Razmotrimo moguće rasporede npr. cifre 0. U jednom od četverocifrenih brojeva čija je prva cifra 2, cifru 0 možemo rasporediti na 7 načina: tri nule iza cifre 2, dvije nule iza cifre 2 (3 načina) i jedna nula iza cifre 2 (3 načina). Dakle, cifru nula u broju čija je prva cifra 2 možemo rasporediti na 7 načina. Na isto toliko načina možemo rasporediti i ostalih šest cifara. Isto važi i za brojeve čija je prva cifra 3 ili 4. Među svim tim brojevima je i broj 2000 (što ne smije biti), pa je traženih brojeva ukupno $3 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 7 - 1 = 1028$.
b) Cifru a možemo napisati na tri načina, cifru b na šest načina, cifru c na pet načina i cifru d na četiri načina. Traženih brojeva ima $3 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 360$.

1054. Prema uslovima zadatka je $2a + 2b = 66$, odnosno $a + b = 33$, sl. 366. Takođe je $\frac{1}{2}a + b + c = 36$; $a + b + \frac{1}{2}a + c = 60$, pa je $a + 36 = 60$, pa je $a = 24\ cm$ i $b = 33 - 24 = 9\ cm$. Površina ΔEBC: $P = \frac{1}{2} \cdot EB \cdot BC = \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot 9 = 54\ cm^2$.



Sl. 366.

1055. Kako je $2019 = 1 \cdot 3 \cdot 673$, to su traženi brojevi $1, 3$ i 673. Prema uslovima zadatka je $3 + 673 + \underbrace{1 + 1 + \cdots 1}_{1343} = 3 \cdot 673 \cdot \underbrace{1 \cdot 1 \cdot \cdots \cdot 1}_{1343} = 2019$. Broj činioca datog proizvoda je 1345. Dakle, $n = 1345$.

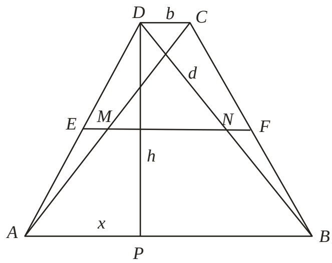
1056. Ako je $\frac{a+b}{b} = 2{,}2$ tada je $\frac{a+b}{b} = 2\frac{1}{5}$, tj. $\frac{a}{b} + \frac{b}{b} = 2 + \frac{1}{5}$. Dalje je $\frac{a}{b} + 1 = 2 + \frac{1}{5}$; $\frac{a}{b} = \frac{6}{5}$; $\frac{b}{a} = \frac{5}{6}$. Kako je $\frac{a-b}{a} = \frac{a}{a} - \frac{b}{a} = 1 - \frac{5}{6} = \frac{1}{6}$.

1057. Neka je x dužina ograde u metrima. Tokom vikenda Jovan je obojio $\frac{3}{8} \cdot x + 12$ metara ograde. U ponedjeljak je obojio $\frac{1}{4} \cdot x + 3$ metara ograde. U utorak je obojio $\frac{1}{3} \cdot \left(\frac{3}{8} \cdot x + 12 + \frac{1}{4} \cdot x + 3\right) = \frac{5}{24} \cdot x + 5$ metara ograde. U srijedu je obojio $\frac{1}{24} \cdot x$ metara ograde. Dužina ograde koju je Jovan obojio je $\left(\frac{3}{8} \cdot x + 12\right)$

$+\left(\frac{1}{4}\cdot x+3\right)+\left(\frac{5}{24}\cdot x+5\right)+\left(\frac{1}{24}\cdot x\right)=\frac{7}{8}\cdot x+20$, pa je $\frac{7}{8}\cdot x+20=x;\ x=160\ m.$

1058. Prema uslovima zadatka, na kraju sva tri prijatelja imaju po 4000 KM. Todor je prije zadnje raspodjele imao 8000 KM, a 4000 KM je podijelio ravnopravno Igoru i Jovanu, što znači da su prije toga Igor i Jovan imali po 2000 KM manje, tj. prije zadnje raspodjele novca Igor i Jovan su imali po 2000 KM, a Todor 8000 KM. Prije Jovanove raspodjele on je imao 4000 KM, pa je Igor 1000 KM, Jovan 4000 KM i Todor 7000. Na početku su imali: Igor 2000 KM, Jovan 3500 KM i Todor 6500 KM.

1059. a) Prema sl. 367, imamo da je $AP=x=4\ cm$, odnosno $BP=5\ cm$. Iz pravouglog trougla APD slijedi $(h+2)^2=h^2+4^2$, pa je $h=3\ cm$. Iz pravouglog trougla PBD je $d=BD=\sqrt{BP^2+PD^2}=\sqrt{34}\ cm$. b) Kako je EF srednja linija trapeza, to je $EM=NF=\frac{b}{2}=0{,}5\ cm$. Onda je $MN=EF-EM-NF=4\ cm$.



Sl. 367.

1060.

$$\frac{n^2+2n-8}{n^2-4}=\frac{n^2-2n+4n-8}{(n-2)(n+2)}=\frac{n(n-2)+4(n-2)}{(n-2)(n+2)}=\frac{(n-2)(n+4)}{(n-2)(n+2)}=\frac{n+4}{n+2}.$$

Dalje je $\frac{n+4}{n+2}=\frac{(n+2)+2}{n+2}=1+\frac{2}{n+2}$. Dati razlomak će biti cijeli broj ako je $n+2$ djelitelj broja 2, tj. $n+2\in\{1,-1,2,-2\}$. Odavde slijedi da $n\in\{-1,-3,0,-4\}$.

1061. Primjetimo da je $-2+3=-4+5=-6+7=\cdots=1$. Iz uslova zadatka, je $1-2+3-4+5-6+7-\cdots=2019$; $\quad -2+3-4+5-6+7-\cdots=2018$. To znači da trebamo sabrati 2018 parova brojeva sa različitim predznacima, počevši parom $-2+3$; treba sabrati 4036 brojeva. Kako u zbiru $-2+3-4+5-6+7-\cdots=2018$ nema broja 1 posljednji broj je 4037.

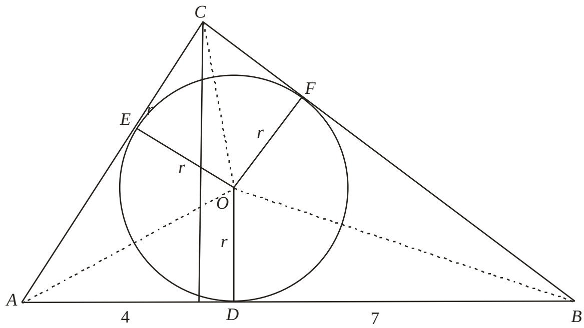
1062. Označimo sa n broj stranica i sa β_n veličinu unutrašnjeg ugla pravilnog mnogougla koji ima više stranica, a sa m broj stranica i sa β_m veličinu ugla pravilnog mnogougla koji ima manje starnica. Tada je $n=2m$, $\beta_m=\frac{(m-2)\cdot 180^{\circ}}{m}$ i $\beta_n=\frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n}$, pa je, prema zadatku, $\beta_m=\beta_n-10^{\circ}$; $\frac{(m-2)\cdot 180^{\circ}}{m}=\frac{(n-2)\cdot 180^{\circ}}{n}-10^{\circ}$. Dalje je $\frac{(m-2)\cdot 180^{\circ}}{m}=\frac{(2m-2)\cdot 180^{\circ}}{2m}-10^{\circ}$, pa je $m=18$, odnosno $n=36$. Uvrštavanjem $m = 18$ i $n = 36$ u formule $\beta_m = \frac{(m-2)\cdot 180^{\mathrm{O}}}{m}$ i $\beta_n = \frac{(n-2)\cdot 180^{\mathrm{O}}}{n}$ dobijamo da je $\beta_m = 160^{\mathrm{O}}$ i $\beta_n = 170^{\mathrm{O}}$.

1063. Kako je $1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \cdots + 2018\cdot 2020 = (2-1)(2+1)(3-1)(3+1) + (4-1)(4+1) + \cdots + (2019-1)(2019+1) = 1^2 - 1^2 + 2^2 - 1^2 + 3^2 - 1^2 + 4^2 - 1^2 + \cdots + 2019^2 - 1^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2019^2 - 2019$.
Dalje je

$$(1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2019^2) - (1\cdot 3 + 2\cdot 4 + 3\cdot 5 + \cdots + 2018\cdot 2020) =$$
$$= (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2019^2) - (1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + 2019^2 - 2019) = 2019.$$

Tražena razlika je 2019.

1064. Neka je ABC dati pravougli trougao i D, E, F tačke u kojima kružnica upisana u taj trougao dodiruje njegove stranice AB, BC i CA, redom, sl. 368. Tada je $AD = 4\ cm$ i $BD = 7\ cm$. Četverougao $CFOE$ je kvadrat stranice r – poluprečnik upisane kružnice u trougao ABC. Kako je $AF = AD$ i BE(tangentne duži), to će katete datog trougla biti $AC = AE + EC = 4 + r$; $BC = BF + FC = 7 + r$. Površina trougla je $P = \frac{AC\cdot BC}{2} = \frac{(4+r)\cdot(7+r)}{2} = \frac{28+11r+r^2}{2} = 14 + \frac{11r+r^2}{2}$.
Primjenom Pitagorine teoreme je $(4+r)^2 + (7+r)^2 = 11^2$, pa je $11r + r^2 = 28$. Uvrštavanjem ove vrijednosti dobijamo površinu: $P = 28\ cm^2$.



Sl. 368.

1065. $\frac{1+2+3+\cdots+2019+m}{1+2+3+\cdots+2018+m} = \frac{1+2+3+\cdots+2018+m+2019}{1+2+3+\cdots+2018+m} = 1 + \frac{2019}{1+2+3+\cdots+2018+m}$. Početni broj će biti prirodan ako je $\frac{2019}{1+2+3+\cdots+2018+m} \in N$, a najmanju vrijednost je ako je $1 + 2 + 3 + \cdots + 2018 + m = 2019$. Dalje je $1 + 2 + 3 + \cdots + 2018 = \frac{2018\cdot 2019}{2} = 2037171$. Zamjenom u gornju jednačinu dobijamo $2037171 + m = 2019$, pa je $m = -2035152$.

1066. Neka je n broj minuta za koje Jovan može sam završiti zadani posao, a m broj minuta za koje Marko može sam završiti zadani posao. Prema uslovu zadatka je $n = m + 30$. Za jednu minutu Jovan završi $\frac{1}{n}$, Marko $\frac{1}{m}$, a zajedno $\frac{1}{n} + \frac{1}{m}$ dio posla. Radeći zajedno zadani posao mogu završiti za 36 minuta, pa u minuti završe $\frac{1}{36}$ dio posla. Kako je $n = m + 30$ imamo $\frac{1}{m+30} + \frac{1}{m} = \frac{1}{36}$. Sređivanjem ove jednakosti dobijamo

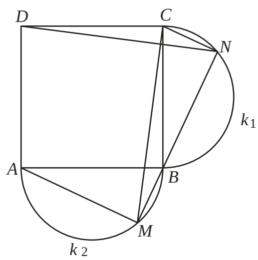
$m^2 - 2m \cdot 21 + 441 - 441 - 1800 = 0$; $(m - 21)^2 = 39^2$, pa je $m = -18$ ili $m = 60$. Rješenje je $m = 60$, a to znači da će Marko sam završiti dati posao za 60 minuta, a Jovan za 90 minuta.

1067. Odredi parove cijelih brojeva x i y za koje vrijedi $x \cdot y - 7x - y = 3$. Iz polazne jednačine imamo $x \cdot y - y = 7x + 3$; $y(x - 1) = 7x + 3$. Za $x = 1$ slijedi da je $y \cdot 0 = 10$, što je nemoguće za svaki $y \in Z$. Za $x \neq 1$ je $y = \frac{7x+3}{x-1} = \frac{7x-7+10}{x-1} = 7 + \frac{10}{x-1}$. Dalje dobijamo $y \in Z \Leftrightarrow \frac{10}{x-1} \Leftrightarrow x - 1 \in \{1, -1, 2, -2, 5, -5, 10, -10\} \Leftrightarrow$ $x \in \{2, 0, 3, -1, 6, -4, 11, -9\}$. Iz izraza $= \frac{7x+3}{x-1} = 7 + \frac{10}{x-1}$, za svako x izračunamo redom odgovarajuće y i tako dobijamo $y \in \{17, -3, 12, 2, 9, 5, 8, 6\}$. Rješenja su uređeni parovi: $\{2,17\}, \{0,-3\}, \{3,12\}, \{-1,2\}, \{6,9\}, \{-4,5\}, \{11,8\}$ i $\{-9,6\}$.

1068. Broj n možemom zapisati u obliku $n = 3p + a$; $0 \leq a \leq 2$; $n = 6q + b$; $0 \leq b \leq 5$; $n = 9r + c$; $0 \leq c \leq 8$. Kako je $a + b + c = 15$, to slijedi da je $a = 2$; $b = 5$; $c = 8$. Tada je $n + 1 = 3p + 3 = 6q + 6 = 9r + 9$. Dakle, $n + 1$ je djeljiv sa $3, 6$ i 9, tj. sa 18. Znači da je $n + 1 = 18k$, pa je $n = 18k - 1$. Dakle, ostatak pri dijeljenju sa 18 je 17.

1069. Pretpostavimo da su na takmičenju učenici iz najviše 44 grada i da iz svakog grada ima najviše 44 učenika. Tada je na takmičenju najviše moglo da bude 1936 učesnika. Kako je na takmičenju bilo više od 1936 učesnika ako bismo pretpostavili da je neko od preostalih takmičara iz nekog od datih gradova, on bi bio 45. takmičar iz tog grada, a ako bismo pretpostavili da je i nekog drugog od ponuđenih gradova to bi bio 45. grad odakle ima takmičara, pa važi tvrđenje zadatka.

1070. $\measuredangle ABM = \measuredangle CBN = 90^0$, sl. 369. $\measuredangle BNC$ je periferijski ugao nad prečnikom BC pa je prav. Odavde je $\measuredangle ABM = \measuredangle BCN$, jer su kružnice k_1 i k_2 podudarne. Kako jednakim periferijskim uglovima odgovaraju jednake tetive to je $AM = BN$.



Sl. 369.

Sada imamo da je $\Delta MBC \cong \Delta NCD$, odakle je $\measuredangle BCM = \measuredangle CDN$. Kako je jedan par ovih uglova normalan (BC i CD) to zaključujemo da je i drugi par krakova normalan, odnosno $CM \perp DN$.

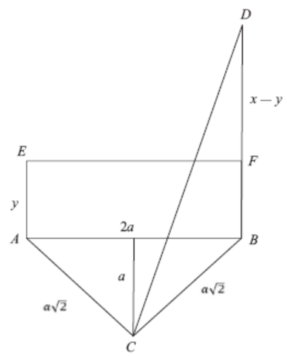
1071. Neka je $h_a = h_b + h_c$. Iz $2P = a \cdot h_a = c \cdot h_c$, slijedi $\frac{h_a}{a} = \frac{h_a}{b}$ i $\frac{h_a}{c} = \frac{h_c}{a}$. Tada je $\frac{h_b+h_c}{a} = h_a\left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$, odnosno $\frac{1}{a} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)$. Sada je $\frac{1}{a^2} = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right)^2 = \frac{b^2+2bc+c^2}{b^2c^2}$, odnosno $b^2c^2 = a^2(b^2 + 2bc + c^2)$. Odavde je $b^2c^2 - 2a^2bc = a^2(b^2 + c^2)$, pa dodavanjem a^4 dobijamo $a^4 - 2a^2bc + b^2c^2 = a^4 + a^2(b^2 + c^2)$, tj. $(a^2 - bc)^2 = a^2(a^2 + b^2 + c^2)$. Dalje je, $a^2 + b^2 + c^2 = \left(\frac{a^2-bc}{a}\right)^2$. Kako su a, b i c prirodni brojevi su $a^2 + b^2 + c^2$ i $\frac{a^2-bc}{a}$ prirodni brojevi čime je dokaz završen.

1072. Kako je $2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$, to je $\{p, q, r, s + t\} = \{2, 3, 5, 67\}$. Kako $s + t$ ne može biti 2 i 3, jer ne postoje prosti brojevi s i t čiji je zbir 2 ili 3, to jest $s + t = 5$ ili $s + t = 67$. Ako je $s + t = 5$ tada su s i t brojevi 2 i 3, a p, q, r uzimaju vrijednosti iz skupa $\{2, 3, 67\}$. U slučaju $s + t = 67$ nema rješenja, jer ako je jedan broj 2, drugi je 65, koji nije prost, a ako su s i t neki drugi prosti brojevi oni su neparni, pa njihov zbir mora biti paran broj. Dakle, rješenja su:
$\{p, q, r, s, t\} \in \{(2,3,67,2,3), (2,67,3,2,3), (3,2,67,2,3)(3,67,2,2,3), (67,2,3,2,3), (67,3,2,2,3), (2,3,67,3,2), (2,67,3,3,2), (3,2,67,3,2), (3,67,2,3,2), (67,2,3,3,2), (67,3,2,3,2)\}$.

1073. Kako je $2310 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$, to grupisanjem članova zbira po 2, 3, 5 i 7 članova dobijamo:

1) $S = 2(1 + 2) + 2^3(1 + 2) + 2^5(1 + 2) + \cdots + 2^{2309}(1 + 2) = 3(2 + 2^3 + 2^5 + \cdots + 2^{2309})$, odakle dobijamo da je zbir S djeljiv sa 3.
2) $S = 2(1 + 2 + 2^2) + 2^4(1 + 2 + 2^2) + 2^8(1 + 2 + 2^2) + \cdots + 2^{2308}(1 + 2 + 2^2) = 7(2 + 2^4 + 2^8 + \cdots + 2^{2308})$, pa je zbir S djeljiv i sa 7.
3) $S = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + 2^6(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) + \cdots + 2^{2306}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4) = 31(2 + 2^6 + \cdots + 2^{2306})$, pa je zbir S djeljiv i sa 31.
4) $S = 2(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) + 2^8(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) + \cdots + 2^{2304}(1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5 + 2^6) = 127(2 + 2^8 + \cdots + 2^{2304})$ pa slijedi da je zbir S djeljiv i sa 127.

1074. Tijelo $ABCDE$ je četverostrana piramida sa osnovom $ABED$ (pravougli trapez) i visinom jednakom visini jednakokrakog trougla ABC, sl. 370. Dakle $H = a$, pa je $V = \frac{1}{3} \cdot \frac{(x+y)\cdot 2a}{2} \cdot a = \frac{(x+y)\cdot a^2}{3}$. Prema uslovu je $\frac{(x+y)\cdot a^2}{3} = \frac{1}{6}(2a)^3$, odnosno $\frac{(x+y)\cdot a^2}{3} = \frac{4}{3}a^3$. Odavde poslije skraćivanja sa $\frac{1}{3}a^2$ dobijamo $x + y = 4a$. Kako je po pretpostavci trougao CED pravougli, to je $CE^2 + DE^2 = CD^2$.



Sl. 370.

Iz trougla BCE je $CE^2 = 2a^2 + y^2$; iz trougla DEF je $DE^2 = 4a^2 + (x - y)^2$; iz trougla ACD je $CD^2 = 2a^2 + x^2$. Tako dobijamo $2a^2 + y^2 + 4a^2 + (x - y)^2 = 2a^2 + x^2$. Ovaj uslov možemo napisati u obliku $(x - y)^2 - (x^2 - y^2) + 4a^2 = 0$, odnosno
$(x - y)^2 - (x - y)(x + y) + 4a^2 = 0$. Kako je $x + y = 4a^2$, biće
$(x - y)^2 - 4a^2(x - y) + 4a^2 = 0$, a to daje $((x - y) - 2a)^2 = 0$. Odavde je

$x - y - 2a = 0$, tj. $x - y = 2a$. Sada riješimo system jednačina po x i y:
$x + y = 4a$ i $x - y = 2a$, odakle dobijamo $x = 3a$ i $y = a$. Površinu tijela $ABCDE$:
$P = 4a^2 + a^2 + \frac{a^2\sqrt{2}}{2} + \frac{3a^2\sqrt{2}}{2} + a^2\sqrt{6} = a^2(5 + 2\sqrt{2} + \sqrt{6})$.

1075. Pogledajmo koliko ima uređenih parova prirodnih brojeva (a, b), takvih da zadovoljavaju uslove zadatka.

Ako je $a = 1$, tada b može primiti vrijednosti $1,2,3, \cdots, 2017$.

Ako je $a = 2$, tada b može primiti vrijednosti $1,2,3, \cdots, 2016$.

$\vdots$

Ako je $a = 2017$, tada b može primiti samo vrijednost 1. Dakle, uređenih parova (a, b), pri čemu su a i b prirodni brojevi, ima: $1 + 2 + 3 + \cdots + 2017 = \frac{2017 \cdot 2018}{2} = 2035153$.Pogledajmo koliko ima uređenih parova (a, b), koji zadovoljavaju uslove zadatka, gdje su a i b cijeli brojevi različiti od nule.
Iz uslova $|a| + |b| < 2019$ slijedi da svakom uređenom paru prirodnih brojeva (a, b), koji zadovoljavaju uslov zadatka možemo pridružiti I uređene parove cijelih brojeva oblika $(a, -b)$, $(-a, b)$, $(-a, -b)$ koji zadovoljavaju uslove zadatka. Uređenih parova cijelih borjeva (a, b), gdje su a i b cijeli brojevi različččiti od nule ima $4 \cdot 2035153 = 8140612$. Ostalo je još prebrojati uređene parove (a, b), u kojima je barem jedan od članova jednak nuli. Ako je $a = 0$, tada prema uslovu zadatka slijedi $|b| < 2019$. Cijelih brojeva b koji zadovoljavaju taj uslov ima $2 \cdot 2018 + 1 = 4\,037$. Analogno ako je $b = 0$ ima ih isto $2 \cdot 2018 + 1 = 4037$. Uređenih parova cijelih brojeva (a, b), u kojima je barem jedan od članova jednak nuli ima: $4\,037 + 4\,037 - 1 = 8\,073$ (uređeni par (0,0) smo brojali dva puta). Ukupno ima $8140612 + 8\,073 = 8148685$ uređenih parova cijelih brojeva (a, b) sa traženim svojstvom.

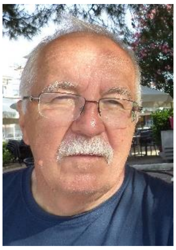
1076. Cifru desetica hiljada petocifrenog broja sa datim svojstvom možemo izabrati na 5 načina, cifru jedinica hiljada na 4 načina, cifru stotina na 3 načina, cifru desetica na 2 načina i cifru jedinica na 1 način. Dakle, dobijamo da takvih petocifrenih brojeva ima $5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$. Kako su kod svakog od njih sve cifre različite, to se u zapisu svih 120 brojeva svaka od cifara $1, 2, 3, 4$ i 5 pojavljuje 120 puta, i to po 24 puta na svakom mjestu u zapisu petocifrenog broja. Dakle, zbir svih petocifrenih brojeva sa datim svojstvom jednak je:
$(1 + 2 + 3 + 4 + 5) \cdot 24 \cdot (10\,000 + 1\,000 + 100 + 10 + 1) = 3\,999\,960$.

1077. Broj je djeljiv sa 11 ako i samo ako je razlika sume cifara na parnim i neparnim mjestima djeljiva sa 11. Dokazaćemo općije tvrđenje:

Ako se u zapisu $(2n + 1)$- cifrenog broja pojavljuju samo nenula cifre a i b, tada je moguće izostavljanjem samo jedne cifre dobiti $2n$-cifren broj, kod koga je suma cifara na parnim mjestima jednaka sumi cifara na neparnim mjestima.

Ukoliko je polazni broj oblika $baba \cdots bab \cdots abab$ ili $abab \cdots aba \cdots baba$, tada brisanjem srednje cifre dobijamo simetričan broj, za kojivaži da je suma cifara na parnim mjestima jednaka sumi cifara na neparnim mjestima. U drugom slučaju, polazni $(2n+1)$- cifren broj sadrži bar jedan par susjednih cifara koje su jednake. Sada brišemo sve parove susjednih cifara koje su jednake aa ili bb, dok ne dobijemo broj sa neparnim brojem cifara kod koga su svake dvije uzastopne cifre različite. Ovaj slučaj smo već riješili, pa možemo odrediti cifru čijim izbacivanjem dobijamo broj koji ima jednaku sumu cifara na parnim i neparnim mjestima. Kad vratimo par uzastopnih jednakih cifara aa, zbir cifara na parnim i neparnim mjestima se uvećava za a, odnosno zbirovi cifara na parnim i neparnim mjestima ostaju jednaki. Kada vratimo sve parove jednakih cifara, sume cifara na parnim i neparnim mjestima u $2n$- cifrenom broju su jednake, čime smo kompletno riješili zadatak.

O AUTORU



Boris Čekrlija je rođen 1948 godine u Banjoj Luci, gdje je završio osnovnu školu i gimnaziju. Diplomirao je na Prirodoslovno-matematičkom fakultetu u Zagrebu, odsjek za matematiku i fiziku. Poslijediplomske specijalističke studije završio je na Prirodno-matematičkom fakultetu u Beogradu.
Do 1985. godine radi kao srednjoškolski profesor matematike i fizike, a zatim kao prosvjetni savjetnik, odnosno školski nadzornik za nastavu matematike u osnovnoj i srednjoj školi.
Objavio je više stručnih radova iz matematike, metodike matematike i istorije matematike.

Bibliografija radova

Knjige / udžbenici, priručnici, radne sveske, zbirke zadataka/

1. Čekrlija, B. (1987). *Nastava matematike raznih nivoa težine - inovacije u obradi racionalnih brojeva* (*skupa* Q) *u* VI *razredu*. Banja Luka: Zavod za unapređivanje vaspitno-obrazovnog rada.

2. Čekrlija, B. i Stojanović, N. (1995). *Zbirka riješenih zadataka iz matematike za pripremanje prijemnog ispita u srednjim školama*. Banja Luka: Društvo matematičara Republike Srpske.

3. Čekrlija, B. (2000). *Vremeplovom kroz matematiku*. Banja Luka: BL Kompani.

4. Čekrlija, B. (2000). *Vremeplovom kroz matematiku*. Laktaši: Grafomark.

5. Boris Čekrlija i dr. (2000). (Komisija za pripremu i izradu Zbirke) *Zbirka zadataka iz matematike za kvalifikacioni ispit za upis u srednje škole 2000/2001*. Banja Luka: Ministarstvo prosvjete Republike Srpske.

6. Boris Čekrlija i dr. (2000). (Komisija za pripremu i izradu Zbirke) *Rješenja zadataka iz matematike za kvalifikacioni ispit za upis u srednje škole 2000/2001.* Banja Luka: Ministarstvo prosvjete Republike Srpske.

7. Boris Čekrlija i dr. (2000). (Komisija za pripremu i izradu Zbirke) *Zbirka zadataka iz matematike za kvalifikacioni ispit za upis u srednje škole 2000/2001*. (Materijal za provođenje kvalifikacionog ispita). Banja Luka: Ministarstvo prosvjete Republike Srpske.

8. Boris Čekrlija i dr. (2001). (Komisija za pripremu i izradu Zbirke) *Zbirka zadataka iz matematike za kvalifikacioni ispit za upis u srednje škole 2001/2002*. Banja Luka: Ministarstvo prosvjete Republike Srpske.

9. Boris Čekrlija i dr. (2001). (Komisija za pripremu i izradu Zbirke) *Rješenja zadataka iz matematike za kvalifikacioni ispit za upis u srednje škole 2001/2002*. Banja Luka: Ministarstvo prosvjete Republike Srpske.

10. Čekrlija, B. (2002). *Logaritamske tablice za učenike srednje škole*. Srpsko Sarajevo: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

11. Čekrlija, B. (2005). *Matematika ukratko* – sve što treba znati iz matematike. Istočno Sarajevo: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

12. Čekrlija, B. (2006). *Matematika plus – Zbirka pripremnih zadataka za takmičenja*. Laktaši: Grafomark.

13. Boris Čekrlija i Petar Đaković (2007). *Matematika za drugi razred osnovne škole*. Istočno Sarajevo: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

14. Boris Čekrlija i Petar Đaković (2007). *Radna sveska iz matematike za drugi razred osnovne škole*. Istočno Sarajevo: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

15. Boris Čekrlija (2011). *Priče o brojevima.* (Lektira Matematiskopa sveska 8). Beograd: Izdavačko preduzeće Matematiskop.

16. Boris Čekrlija (2012). *Matematička takmičenja učenika osnovnih škola Republike Srpske 1995-2012.* Banja Luka: Grafid d.o.o.

17. Petar Đaković i Boris Čekrlija (2014). Priručnik za matematiku za 2. razred. Istočno Sarajevo: Zavod za udžbenike i nastavna sredstva.

18. Boris Čekrlija (2019). *Matematička takmičenja učenika osnovnih škola Republike Srpske 1995-2019,* drugo dopunjeno izdanje; Banja Luka: Grafid d.o.o.

Neobjavljeni radovi

1. Čekrlija, B. (2009). *Zbirka riješenih zadataka iz matematike za dodatni rad i pripreme za takmičenja*

2. Čekrlija, B. (2012). *Matematičarenje*

3. Čekrlija, B. (2014). *Putevima matematike*

4. Čekrlija, B. (2014). *Prilozi za matematičku biografiju*

Stručni radovi

1. Čekrlija, B. (1985). Jedna mogućnost interpretacije kvantifikatora. Nastava br. 4.

2. Čekrlija, B. i Krunić, D. (1987). Život i djelo Ruđera Boškovića. Nastava br. 7.

3. Čekrlija, B. (1988). O matematičkoj logici u nastavi. Nastava br. 10.

4. Ilić, dr M; Čekrlija, B. (1988). Nastava matematike različitih nivoa težine. Inovacije u nastavi – časopis za savremenu nastavu br.2.

5. Čekrlija, B. (1990). De Morganovi zakoni za kvantifikatore. Nastava br.13-14.

6. Čekrlija, B. (1990). Peti postulat i geometrija Lobačevskog u djelima naših matematičara. Matematika br 2.

7. Čekrlija, B. (1991). Izračunavanje površine mnogougla na kvadratnoj mreži koordinatne ravni. Matematički list br 5.

8. Čekrlija, B. (1992). U svijetu brojeva (1). Radoznali glas br. 5.

9. Čekrlija, B. (1992). U svijetu brojeva (2). Radoznali glas br. 6.

10. Čekrlija, B. (1994). Arhimed. Školarac-list za učenike osnovne škole br. 6.

11. Čekrlija, B. (1994). Cijeli dio od x. Bilten Društva matematičara RS br. 1.

12. Čekrlija, B. (1994). Diofantove jednačine. Bilten Društva matematičara RS. br. 1.

17. Čekrlija, B. (1994). Mihailo Petrović. Školarac-list za učenike osnovne škole br.12.

18. Ćelić, M., Čekrlija, B. i Vinčić, M. (1996). Konsekutivna dedukcija trigonometrijskih funkcija sinus i kosinus. Naša škola br. 3-4.

19. Čekrlija, B., Romano, D. i Vinčić, M. (1996). Jedan pristup stručnom usavršavanju nastavnika matematike. Naša škola br 3-4.

21. Čekrlija, B. (1998). O prvom udžbeniku istorije matematike u Srbiji. Prosvetni pregled, Beograd.

22. Čekrlija, B. (2002). O cijelim brojevima. Matematiskop - magazin za popularisanje matematike br. 5.

23. Čekrlija, B. (2005). Nastava matematike raznih nivoa složenosti. U knjizi: Usavršavanjem nastavnika do aktivnog učenja učenika- Zbornik radova. Banja Luka: Republički pedagoški zavod.

24. Čekrlija, B. (2006). Od crteža do znaka za brojeve. U knjizi: Edukacija nastavnika za rad sa nadarenim i kreativnik učenicima - Zbornik radova. Banja Luka: Republički pedagoški zavod.

25. Čekrlija, B. (2009). Godišnji program rada dirktora osnovne škole. U knjizi: U susret promjenama. Banja Luka: Republički pedagoški zavod.

26. Čekrlija, B. (2009). Matematički biseri. Matematiskop - magazin za popularisanje matematike br. 2.

Ostali radovi

1. Čekrlija, B. i dr. Doprinos nastavnika u ostvarivanju demokratije u učionici. U knjizi: Razvoj školskog menadžmenta u Bosni i Hercegovini - između teorija i primjera dobre prakse. Sarajevo: CES Programme Finish Co-operation in the Education Sector of Bosnia and Herzegovina 2003-2006.

2. Čekrlija, B. i Damjanović, P. (2006). Participativni menadžment u obrazovanju. U knjizi: Razvoj školskog menadžmenta u Bosni i Hercegovini – između teorija i primjera dobre prakse (str. 361-381). Sarajevo: CES Programme Finish Co-operation in the Education Sector of Bosnia and Herzegovina 2003-2006.

3. Čekrlija, B. i Đaković, P. (2006). Uloga školskih tijela u menadžmentu škole. U knjizi: Razvoj školskog menadžmenta u Bosni i Hercegovini - između teorija i primjera dobre prakse. Sarajevo: CES Programme Finish Co-operation in the Education Sector of Bosnia and Herzegovina 2003-2006.

4. Čekrlija, B. (2002). Obrazovanje u BiH. Na sajtu: www.see-educoop.net. Očitano 07. 08. 2007.

5. Čekrlija, B. (2006). Indikatori kvalitetne škole. U knjizi: Razvoj školskog menadžmenta u Bosni i Hercegovini - između teorija i primjera dobre prakse. Sarajevo: CES Programme Finish Co-operation in the Education Sector of Bosnia and Herzegovina 2003-2006.